
Дж. Сквайрс
Практическая физика

Practical Physics

G. L. SQUIRES

Lecturer in Physics
at the University of Cambridge
and Fellow of Trinity College,
Cambridge



McGRAW-HILL•LONDON 1968

Дж. СКВАЙРС

Практическая физика

Перевод с английского
под редакцией
Е. М. ЛЕЙКИНА



МОСКВА 1971

УДК 530

Книга представляет собой пособие для начинающих физиков-экспериментаторов. В ней рассматриваются вопросы практического проведения измерений, статистической обработки результатов измерения, излагаются некоторые методы эксперимента, даются указания по оформлению результатов измерений, составлению отчетов и научных статей. Изложение дополнено задачами и упражнениями с решениями и ответами.

Книга рассчитана на студентов, специализирующихся в области экспериментальной физики, а также на преподавателей и аспирантов.

Редакция литературы по физике

Инд. 2-3-1
62-71

Предисловие редактора перевода

Практическая физика. Что скрывается за таким названием? Может быть, перечень «научных» способов лужения кастрюль, приготовления жаркого или придания ткани водоотталкивающих свойств? Нет, эта книга совсем о другом. Ее автор руководствовался желанием содействовать изучению общего курса физики в высшей школе (обычно на 1—2 курсах). Главная цель книги — привить студентам вкус к экспериментальным исследованиям. Задача не из простых, ибо на младших курсах практическая работа студентов сводится к выполнению традиционных лабораторных работ. В этих условиях творческие возможности строго регламентированы, а рутинный характер задач вряд ли может вызвать большой энтузиазм. Судите сами, нынешние молодые люди, подготовленные куда глубже и разностороннее, нежели их сверстники 30—40 лет назад, по существу вынуждены начинать все от той же печки, что и их отцы и деды. Практикум по физике, к сожалению, больше похож на игру в эксперимент или муштру по азбуке эксперимента, хотя по идее он должен был бы служить выработке у будущих специалистов важных и необходимых для самостоятельной работы качеств.

Но книга Дж. Сквайрса не является простым дополнением к старым руководствам. Напротив, автор стремится выделить те факторы обучения, которые лучше всего отвечали бы эволюции, происходящей в современной науке и технике. Научно-технический прогресс сопровождается глубокими переменами как в самой науке, так и в ее влиянии на различные области техники. Для проведения нынешних экспериментов уже не хватает готовых приборов. Специалисты конструируют и строят сложные уникальные установки, целые комплексы, требующие от своих создателей знаний по самым различным областям науки и техники. Так возникает одна из самых насущных проблем модернизации образования — более разносторонняя подготовка, более широкий кругозор будущих специалистов. Между тем инженерная подготовка прежде, как правило, ориентировалась на узкую специализацию. В этом имелись и бесспорные достоинства и очевидные недостатки. Главный недостаток — узость взглядов, мало способствующая пробуждению творческой инициативы. Однако становится все более ясно, что если в инженерном образовании увеличить удельный вес фундаментальных дисциплин, т. е. дать будущему специалисту хорошую подготовку по физике и математике, то это не только облегчит в дальнейшем усвоение инженерных дисциплин, но и создаст прочный фундамент для дальнейшей самостоятельной работы.

Изменение общей направленности подготовки специалистов — важное, но далеко не единственное нововведение. Не менее настоятельной является потребность видоизменения и самой системы обучения. На смену всем учебной лабораторной практике приходит тенденция к обучению в процессе работы. Учебные лаборатории все больше вытесняются лабораториями исследовательскими. Ничто не может лучше научить студентов творческому подходу к работе, чем участие в настоящем научном исследовании. Но оно требует определенной творческой зрелости, культуры обращения с приборами и аппаратурой, часто уникальной и дорогостоящей. Именно настоящая работа выковывает нужные качества будущих специалистов, ибо выведенный из строя прибор обрекает здесь на бездействие, а неверный результат не может не повлиять на престиж будущего научного работника.

Обучение в процессе участия в исследовательской работе вырабатывает еще одно важное качество — рационализм. Нынешние опыты недешево обходятся как по затратам времени, так и по материальным вложениям. Поэтому, приступая к исследованию, специалист должен знать наперед, даст ли планируемый эксперимент ответ на поставленный вопрос, обеспечит ли точность проводимых измерений получение надежных окончательных выводов.

Но рано или поздно наступает время, когда, закончив эксперимент, исследователь садится за письменный стол, чтобы подготовить отчет или статью о проделанной работе для одного из научных журналов. Время неторопливых размышлений на бумаге уходит в прошлое. Если специалист искренне заинтересован в том, чтобы его статью читали, чтобы его труд был правильно понят и по достоинству оценен, он должен уметь ясно и кратко выражать свои мысли. Никто не может лучше автора выделить главное в работе, более веско аргументировать сделанные выводы. Книга Дж. Сквайрса прививает читателю вкус к поиску наиболее полного и наглядного отражения результатов работы в отчете о ней, приучает пользоваться при описании научных фактов правильным литературным языком. Здесь уместно отметить, что в английском оригинале есть ссылки на литературу, которая представляет собой руководства по написанию научных статей на английском языке. В нашей литературе подобные руководства, к сожалению, отсутствуют.

Резюмируя, можно сказать, что книга Дж. Сквайрса, будучи внешне похожей на простое дополнение к «Руководству к лабораторным работам по физике», представляет собой по существу первый, но очень важный шаг в направлении модернизации системы обучения, причем в наиболее сложном ее разделе практических работ.

Перевод книги на русский язык выполнен В. Ф. Грушиным.

Е. Лейкин

Из предисловия автора

Экспериментальная физика занимала самые тонкие умы в истории человечества. Однако в учебных курсах лабораторных работ, к сожалению, не всегда обнаруживаются все привлекательные стороны данного предмета. Моя книга посвящена экспериментальной физике и предназначена для студентов, но в ней нет систематического изложения физических опытов и она не может служить справочником по экспериментальным методам. Цель книги — указать на необходимость осмысленного подхода к экспериментальной работе. Она задумана как дополнительное пособие к общему курсу лабораторных работ. Я старался добиться того, чтобы студенты более критически относились к тому, что они делают, лучше представляли себе, что можно сделать, и чтобы благодаря этому курс лабораторных работ был более интересным и более содержательным.

В книге три части. Первая посвящена вопросам статистической обработки экспериментальных данных. В ней я попытался преподнести статистику не как ряд упражнений по математике, а как одно из орудий экспериментатора. Это, вероятно, самая трудная часть книги, и тем, кому не удастся сразу усвоить подробные математические выводы, не стоит огорчаться. Им следует прочесть все главы, чтобы получить общее представление, а затем идти дальше и пользоваться результатами выводов. Позднее всегда можно вернуться к доказательствам и осилить их.

Вторая часть посвящена экспериментальным методам. Здесь я подробно разбираю ряд приборов, методов и опытов с целью показать те средства, которыми располагает экспериментатор. Конечно, я выбирал их по своему усмотрению, но старался выбирать для иллюстрации такие методы, которые полезны и сами по себе.

В третьей части книги говорится о том, как лучше всего записывать данные, как правильно проводить вычисления и как научиться писать статьи хорошим языком.

Все примеры, которые приводятся в книге, чрезвычайно просты. Всюду, кроме одного места, где речь идет об измерении магнитного момента электрона, материал изложен приблизительно на уровне знаний студентов первого курса. Но я думаю, что практические сведения, почерпнутые из моей книги, будут полезны более широкому кругу учащихся — от смышленых старшеклассников до аспирантов.

Эксперимент по определению магнитного момента электрона требует более высокого уровня знаний и основан на представлениях, выходящих за рамки курса физики на первом году обучения. Я постарался объяснить его так, чтобы это было понятно студентам, знакомым с основами квантовой механики. Этот эксперимент, несомненно, заслуживает внимательного изучения, но при первом чтении весь раздел можно без ущерба для дальнейшего опустить.

Дж. Сквайрс

Предмет практической физики

Цель данной книги — помочь студентам в выполнении лабораторных работ по физике, повысить эффективность и содержательность работ. Мы можем спросить себя — какова цель лабораторной практики в высшем учебном заведении? Таких целей несколько. Лабораторные работы позволяют:

а) проиллюстрировать *теоретические* положения физики,

б) познакомиться с *приборами*,

в) приобрести опыт в проведении *экспериментов*.

Рассмотрим все по порядку.

Демонстрация опыта часто весьма способствует пониманию физического явления. Например, наша интуиция не подсказывает нам, что возможна интерференция света. Утверждение о том, что два пучка света могут погасить друг друга и дать темноту, с трудом принимается на веру, и для многих необходима наглядная демонстрация такого явления. Демонстрация опытов полезна и в другом отношении — она дает представление о порядках величин. Тот факт, что интерференционные полосы, вообще говоря, расположены очень близко друг к другу, свидетельствует о том, что длина световой волны крайне мала по сравнению с привычными размерами. Но демонстрация не может заменить объяснения, которое основано на геометрических и фазовых соотношениях. Таким образом, первая задача практикума — иллюстрация теоретических положений — хотя и важная, но довольно ограниченная.

Вторая задача, по-видимому, важнее, но здесь следует сразу же четко выяснить, что мы понимаем под прибором. В любом курсе практических работ вы столкнетесь с такими простыми приборами, как потенциометры, микрометры, электронные осциллографы и т. п., и опыт работы с ними будет, несомненно, полезен. Но

когда вы займетесь самостоятельными научными исследованиями, обилие приборов, с которыми придется работать, покажется невероятным. И ни один курс практических работ, по-видимому, не сможет научить вас пользоваться каждым из них. В ходе же лабораторных работ перед вами ставится задача приобрести опыт работы с приборами *вообще*. У экспериментатора, имеющего дело с приборами, должна быть особая психология, и курс лабораторных работ должен помочь вам выработать такую психологию. Правда, здесь мы соприкасаемся уже с третьей задачей, наиболее важной из всех.

Слова «опыт в проведении экспериментов» могут показаться не совсем ясными, так что нам нужно разобраться в этом подробнее. Главная задача практической физики состоит в том, чтобы научить вас

а) планировать эксперимент так, чтобы точность измерений соответствовала поставленной цели;

б) учитывать возможность систематических ошибок и принимать меры для их устранения;

в) анализировать результаты эксперимента и делать правильные выводы;

г) оценивать точность окончательного результата;

д) вести запись измерений и расчетов аккуратно, ясно и кратко.

Все это вместе взятое и означает подготовить квалифицированного экспериментатора. Но этот курс может дать и нечто большее. Он может дать представление о том, каков общий метод физики.

Физика — это одна из наук, цель которых — познание природы. Когда физик сталкивается с каким-либо явлением природы, он старается выделить те особенности явления, которые ему кажутся самыми важными. Так, древние греки, заметив, что движущееся тело в конце концов останавливается, заключили, что для поддержания движения необходима сила. Галилей же и Ньютон, наблюдая то же самое явление, пришли к выводу, что замедление движения здесь вовсе не самое главное. Оно вызывается трением, а в отсутствие трения движение не прекращается. Если бы мы решили проверить это на опыте, то увидели бы, что полностью устранить трение или другие тормозящие силы невозможно. Но их можно

уменьшить, и чем меньше они, тем дольше будет двигаться тело. Таким образом, логично предположить, что в предельном случае, когда трения нет, движение будет оставаться неизменным, о чем и говорит первый закон Ньютона.

Таков общий метод физики. Мы выделяем в данном физическом явлении то, что считаем самым существенным. Затем, обобщая то, что выделили, строим теорию, из которой следуют те или иные выводы. Выводы же проверяем путем эксперимента. Но теоретические выводы обычно относятся к идеализированной или упрощенной ситуации. Чтобы их проверить, нужно создать такую упрощенную ситуацию в сложном, полном хаоса окружающем мире, что не всегда легко сделать.

На лекциях вам преподносят теорию. При этом рассматриваются те стороны реального мира, которые существующая теория считает самыми важными. Может получиться так, что ваше знакомство с миром природы ограничится только этими сторонами и вы будете уверены, что это и есть весь реальный мир, а не отдельные его стороны. К тому же в такой картине мира все столь хорошо увязано, что легко утратить представление о том, каких усилий потребовалось человеческому гению для ее создания. Самое лучшее лекарство от подобной болезни — идти в лабораторию и там убедиться в сложности реального мира.

Занимаясь экспериментальной физикой, вы прежде всего узнаете, как трудно бывает проверить теорию, измерить именно то, что хотите, а не что-то иное, и научитесь преодолевать такие трудности. Но кроме всего прочего у вас появится взгляд на физику в целом, на взаимоотношение между теорией и экспериментом, которое составляет главное содержание предмета.

Часть I

Статистическая обработка результатов измерения

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ОШИБОК

§ 1. Почему так важно оценить ошибку

Измеряя какую-нибудь физическую величину, мы не рассчитываем получить ее истинное значение. Поэтому необходимо как-то указать, насколько полученный результат может быть близким к истинному значению, иными словами, указать, какова точность измерения. Для этого вместе с полученным результатом указывают приближенную ошибку измерения. Например, мы измерили фокусное расстояние линзы f и написали, что

$$f = 256 \pm 2 \text{ мм}. \tag{1.1}$$

Это означает, что фокусное расстояние лежит в пределах от 254 до 258 мм. Но на самом деле равенство (1.1) имеет вероятностный смысл. Мы не можем с *полной уверенностью* сказать, что величина лежит в указанных пределах, но наши измерения показывают, что имеется некоторая *вероятность* этого. В гл. 2 данное утверждение будет сформулировано точнее.

Оценивать ошибки необходимо потому, что, не зная, каковы они, нельзя сделать определенных выводов из эксперимента. Допустим, например, что мы хотим установить, зависит ли сопротивление катушки провода от температуры. Измеренное нами сопротивление катушки оказалось равным [1])

---

[1]) В книге используется система единиц СИ в соответствии с проектом ГОСТа «Единицы физических величин», М., 1970 г. С системой СИ читатель может познакомиться, посмотрев приложение 6.— *Прим. ред.*

200,025 Ом при 10° С,
200,034 Ом при 20° С.

Следует ли придавать значение разнице этих величин, или, как говорят в статистике, *значима* ли она? На этот вопрос нельзя ответить, не зная ошибок измерения. Если ошибка составляет 0,001 Ом, то разница значима, а если ошибка равна 0,010 Ом, то — незначима.

Когда получен какой-то экспериментальный результат, он публикуется и становится общим достоянием. Каждый может пользоваться им, как ему угодно. Одни могут применять его в расчетах для каких-либо практических целей, другие — для проверки теоретических выводов. Скажем, инженеру-электрику необходимо знать удельное сопротивление медного провода для расчета трансформатора, а специалисту по физике твердого тела та же самая величина может понадобиться для проверки электронной теории металлов. И в том и другом случае необходимо знать, достаточно ли точен экспериментальный результат. Если на основании результата делают какие-нибудь выводы, то важно знать, в какой мере можно на них полагаться. Чтобы можно было ответить на подобные вопросы, экспериментатор и обязан указывать величину ошибки измерения.

Конечно, экспериментатор не может предвидеть все возможные применения своего результата, но некоторые применения он должен представлять себе. Он ведь находится не в вакууме — во всяком случае не в интеллектуальном вакууме. Если опыт ставится для проверки теории, то экспериментатор должен представить себе, какова должна быть точность, чтобы имело смысл сравнивать результаты с теоретическими выводами. Таким образом, не только знание ошибки позволяет делать определенные выводы на основании экспериментальных данных, но и, наоборот, задачами эксперимента часто определяется максимальная допустимая ошибка, что в свою очередь может оказать влияние на выбор методики.

Некоторые могут подумать, что всякий эксперимент следует проводить как можно более точно, но такой подход был бы нереальным. Человеческая жизнь ограничена, так же как и возможности экспериментатора, если

только он не гениален. Поэтому важно планировать и проводить эксперимент так, чтобы точность окончательного результата соответствовала его цели. Допустим, что в приведенном примере нам нужно знать сопротивление катушки лишь для того, чтобы использовать ее в качестве эталона в интервале температур от 10 до 20° С, и пусть требуемая точность измерения составляет 1 : 10 000. В таком случае нас будет устраивать, если мы измерим сопротивление с ошибкой 0,010 Ом, а попытка снизить эту ошибку до 0,001 Ом будет лишь ненужной тратой времени. В то же время измерять сопротивление с ошибкой 0,05 Ом просто недопустимо, поскольку тогда результат измерения будет бесполезен с точки зрения поставленной задачи.

Требование соответствующей точности относится не только к окончательному результату опыта, но и к различным величинам, измеряемым в ходе всего эксперимента. Ведь редко бывают такие простые эксперименты, в которых окончательная величина измерялась бы непосредственно. Обычно же приходится измерять целый ряд первоначальных величин, которые лишь в комбинации дают требуемый результат. При этом ошибка окончательного результата определяется ошибками первоначальных величин. Вообще говоря, эти ошибки по-разному влияют на окончательную ошибку. Последняя будет минимальной, если распределить имеющиеся ресурсы времени, приборов и терпения так, чтобы уменьшить те ошибки, которые дают наибольший вклад в окончательную ошибку.

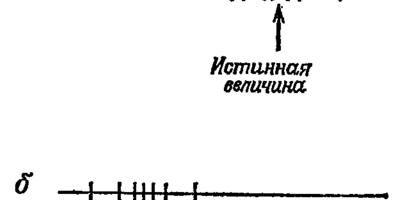
Итак, мы видим, что понятие ошибки измерения играет далеко не второстепенную роль в эксперименте. Наоборот, оно имеет прямое отношение к таким вопросам, как цель эксперимента, его метод и значимость его результатов.

§ 2. Систематические и случайные ошибки

Ошибки можно разделить на два типа — систематические и случайные. Систематической называется ошибка, которая остается постоянной на протяжении всей серии

измерений[1]). Случайной же называется ошибка, которая изменяется и в равной степени может быть как положительной, так и отрицательной.

Случайные ошибки всегда присутствуют в эксперименте. При отсутствии систематических ошибок они служат причиной разброса повторных измерений относительно истинного значения (фиг. 1, *а*). Если, кроме того, имеется и систематическая ошибка, то результаты измерений будут разбросаны относительно не истинного, а смещенного значения (фиг. 1, *б*).





Фиг. 1. Две серии результатов измерений.

а — при наличии только случайных ошибок; *б* — при наличии не только случайных, но и систематических ошибок. Каждая точка изображает результат одного измерения.

Допустим, что при помощи секундомера измеряют период колебаний маятника, причем измерения многократно повторяют. Погрешности момента пуска и остановки секундомера, ошибка в величине отсчета, небольшая неравномерность движения маятника — все это вызывает разброс результатов повторных измерений и поэтому может быть отнесено к категории случайных ошибок.

Если других ошибок нет, то одни результаты окажутся несколько завышенными, а другие несколько заниженными. Но если, помимо того, часы еще и отстают, то все результаты будут занижены. Это уже систематическая ошибка.

Заметим, что систематическая и случайная ошибки различаются по производимому ими эффекту — системати-

[1]) Правда, это слишком узкое определение — иногда систематические ошибки непостоянны. Но здесь, при изложении основных представлений, мы ограничимся таким простым случаем. Более общие случаи рассмотрены в гл. 3 части II.

ческому или случайному. Поэтому нельзя сказать, что данный фактор по самой своей сущности вызывает только систематические или только случайные ошибки. Возвращаясь к нашему примеру, предположим, что каждый раз мы измеряем период новым секундомером. Один из них может отставать, другой может спешить. Но в данном случае погрешности хода секундомеров дадут уже случайную ошибку.

Некоторые факторы могут вызывать одновременно и систематические и случайные ошибки. Так, включая и выключая секундомер, мы можем создать небольшой нерегулярный разброс моментов пуска и остановки часов относительно движения маятника и внести тем самым случайную ошибку. Но если к тому же мы каждый раз слишком торопимся включить секундомер и несколько запаздываем выключить его, то это приведет к систематической ошибке.

§ 3. Систематические ошибки

Систематические ошибки часто возникают из-за того, что условия эксперимента отличаются от предполагаемых теорией, а поправку на это несоответствие не делают. Нетрудно привести примеры эффектов, которыми может быть обусловлена систематическая ошибка. Термо-э. д. с. в мосте сопротивлений, сопротивление подводящих проводов в платиновом термометре, влияние открытой части ртутного термометра, потери тепла в калориметрических измерениях, просчеты, обусловленные мертвым временем счетчика частиц,— вот лишь некоторые из возможных источников систематических ошибок. Еще один обычный источник систематических ошибок — уже упоминавшиеся погрешности измерительной аппаратуры.

Случайные ошибки можно обнаружить путем повторных измерений. Кроме того, увеличивая число измерений и находя среднее арифметическое результатов, мы будем получать величину, которая будет все ближе и ближе к истинному значению. Но при наличии систематической ошибки это ничего не дает. Повторные измерения с тем же самым прибором не позволяют ни обнаружить, ни устранить систематических ошибок. Поэтому систематические

ошибки в принципе опаснее случайных. Если в ходе эксперимента допущены большие случайные ошибки, то они проявят себя в большой величине ошибки окончательного результата. Таким образом, все будут осведомлены о неточности результата, и это не причинит никому никакого ущерба, разве только самолюбию экспериментатора, поскольку полученный им результат ни на кого не произведет впечатления. Другое дело, когда при наличии скрытой систематической погрешности результат будет выглядеть вполне надежным, если он приведен с малой ошибкой, хотя на самом деле неверен.

Классическим примером может служить опыт Милликена по измерению элементарного электрического заряда e. В этом эксперименте требуется знать вязкость воздуха. Милликен взял заниженную величину вязкости и получил

$$e = (1{,}591 \pm 0{,}002)\cdot 10^{-19} \text{ Кл}.$$

В настоящее же время принято значение [4]

$$e = (1{,}60210 \pm 0{,}00002)\cdot 10^{-19} \text{ Кл}.$$

Вплоть до 1930 г. величины ряда других атомных констант, таких, как постоянная Планка и число Авогадро, базировались на милликеновском значении e и, следовательно, содержали ошибку, превышавшую 0,5%.

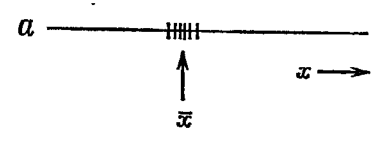
Случайные ошибки можно вычислить методами математической статистики, о которых говорится в двух следующих главах. Систематические же ошибки не поддаются подобному анализу. Лучше всего смотреть на них, как на эффекты, которые необходимо выявить и устранить. Общих рецептов на этот счет не существует. Все дело в том, чтобы тщательно продумывать методику эксперимента и очень придирчиво выбирать аппаратуру. В своей книге мы постараемся указать наиболее распространенные источники систематических ошибок, но, конечно, в данном вопросе ничто не может заменить собственного опыта.

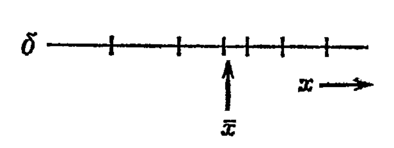
ГЛАВА 2

СЛУЧАЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Введение

Допустим, что мы проводим (без систематических ошибок) серию измерений одной и той же величины. Из-за наличия случайных ошибок отдельные значения x_1, x_2 и т. д. неодинаковы, и в качестве наилучшего значения искомой величины выбирается среднее арифметическое $\bar{x}$. Но вряд ли нам так сильно повезет, что величина $\bar{x}$ окажется равной истинному значению, которое мы обозначим через X. Мы хотим разобраться в том, насколько величина $\bar{x}$ близка к X. Конечно, истинная ошибка нам неизвестна. Иначе мы просто поправили бы $\bar{x}$ на нужную величину и получили бы правильное значение X. Мы можем сказать лишь следующее: имеется какая-то вероятность того, что X лежит в каких-то пределах вблизи $\bar{x}$. Задача в том, чтобы найти, каковы эти пределы, соответствующие определенной вероятности.





Фиг. 2. Результаты многократного измерения одной и той же величины.

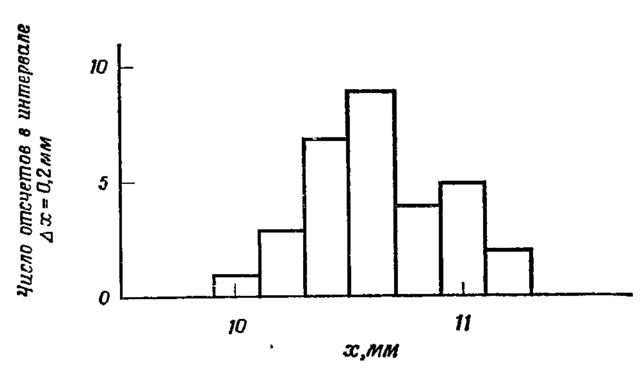
В случае *а* среднее арифметическое $\bar{x}$ должно быть ближе к истинному значению, чем в случае *б*.

Подход к решению этой задачи поясняется схемами фиг. 2. В случае, представленном на фиг. 2, *а*, величина X должна, по-видимому, лежать довольно близко к $\bar{x}$, тогда как в случае, представленном на фиг. 2, *б*, мы не удивимся, если разница окажется большой. Иными словами, чем больше разброс результатов, тем больше должна быть ошибка в величине $\bar{x}$. Цель всей главы —

дать этому расплывчатому качественному утверждению четкое математическое (количественное) выражение. При этом мы будем предполагать, что систематические ошибки отсутствуют.

§ 2. Распределение результатов измерений

Результаты серии измерений одной величины можно наглядно представить, построив диаграмму, которая показывала бы, как часто получались те или иные значения. Такая диаграмма называется *гистограммой*. Чтобы построить гистограмму, мы просто разбиваем весь диапазон измеренных значений на равные интервалы и подсчитываем, сколько раз измеренная величина попадает



Фиг. 3. Гистограмма данных, приведенных в табл. 1.

в каждый интервал. (Ширина интервалов может быть любой и выбирается так, чтобы это было удобно.) Для примера в табл. 1 приведены некоторые данные, а на фиг. 3 изображена соответствующая гистограмма.

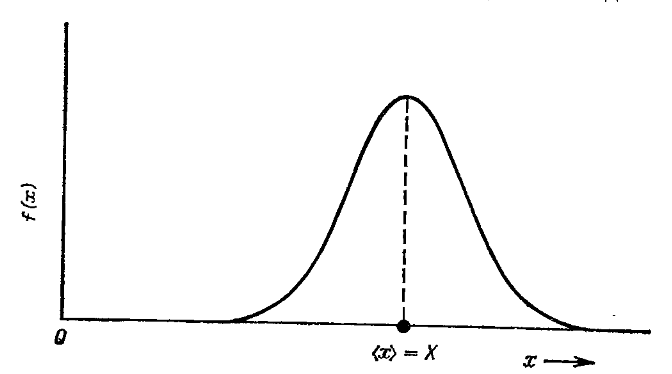
Теперь представим себе, что измерения продолжают до тех пор, пока число измеренных значений N не станет очень большим. Ширину интервалов можно сделать очень малой (при условии, что измерительный прибор обладает достаточной чувствительностью), и все же в каждом интервале будет много отсчетов. Если теперь вместо гистограммы построить график, который давал бы *долю*

Таблица 1

РЕЗУЛЬТАТЫ НЕКОТОРЫХ ГИПОТЕТИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Интервал, мм	Число случаев, когда отсчет попадает в интервал	Интервал, мм	Число случаев, когда отсчет попадает в интервал
9,9—10,1	1	10,7—10,9	4
10,1—10,3	3	10,9—11,1	5
10,3—10,5	7	11,1—11,3	2
10,5—10,7	9		

полного числа отсчетов N, попадающую в каждый интервал, то получится гладкая кривая, которая называется кривой *распределения*. Мы можем ввести соответствующую функцию $f(x)$, так называемую *плотность распределения*, смысл которой состоит в том, что произведение $f(x)\,dx$ дает долю полного числа отсчетов N, приходящуюся на интервал от x до $x + dx$. Иначе говоря, произведение $f(x)\,dx$ есть *вероятность* того, что отдельное



Фиг. 4. Типичная кривая распределения измеренных значений.

случайно выбранное значение измеряемой величины окажется в интервале от x до $x + dx$. Пока мы не будем касаться точного вида $f(x)$, укажем лишь, что типичная кривая распределения выглядит примерно так, как это изображено на фиг. 4.

По определению, $f(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1. \qquad (2.1)$$

Обратим внимание на бесконечные пределы у этого интеграла. В реальном эксперименте у нас не должны получаться значения измеряемой величины, сильно отличающиеся от истинного X. Кроме того, многие из величин по самой своей сущности не принимают отрицательных значений. Поэтому любая функция $f(x)$, взятая нами в качестве плотности распределения, должна становиться очень малой при увеличении разности между X и x. Тогда не возникает никаких трудностей, связанных с бесконечными пределами интегрирования, которые берутся из соображений математического удобства.

В дальнейшем мы будем обозначать угловыми скобками усреднение по всей совокупности измеренных значений. Прежде всего мы введем *среднее значение* для данного распределения

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx. \qquad (2.2)$$

(Здесь мы опустили слово «арифметическое». Под «средним» мы всегда будем подразумевать среднее арифметическое.) Поскольку полное число измерений велико, а систематические ошибки отсутствуют, мы будем полагать, что $\langle x\rangle$ совпадает с истинным значением X.

Ошибка в измеренном значении x равна:

$$e = X - x. \qquad (2.3)$$

Корень квадратный из среднего квадрата разности e обозначается через σ и называется *среднеквадратичным* (стандартным) отклонением или среднеквадратичной (стандартной) ошибкой [1]). Таким образом, величина σ определяется соотношением

$$\sigma^2 = \langle e^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - X)^2 f(x)\,dx. \qquad (2.4)$$

[1]) Величина σ^2 называется *дисперсией*.

Среднеквадратичное отклонение служит мерой ширины кривой распределения, т. е. разброса результатов измерений. При точных измерениях у кривой распределения будет узкий максимум вблизи значения $x = X$ и величина σ будет мала, а при грубых измерениях у нас будет большой разброс результатов относительно X и среднеквадратичное отклонение σ будет велико.

§ 3. Среднеквадратичная ошибка среднего

а. Связь со среднеквадратичной ошибкой отдельного измерения. Допустим, что n последовательных измерений некоторой величины дали значения

$$x_1, x_2, \ldots, x_n. \tag{2.5}$$

При этом число n не обязательно должно быть большим — в обычных экспериментах оно равно 5—10. В качестве наилучшего значения интересующей нас величины лучше всего взять среднее

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i. \tag{2.6}$$

(Везде в данной главе символ Σ означает суммирование от $i = 1$ до $i = n$.) Требуется определить, какова ошибка в величине $\bar{x}$.

Ошибку i-го измерения мы напишем в виде

$$e_i = x_i - X, \tag{2.7}$$

где X — истинное значение измеряемой величины, которое, конечно, неизвестно. Тогда ошибка среднего дается выражением

$$E = \bar{x} - X. \tag{2.8}$$

Теперь представим себе, что данные набираются сериями по n измерений в каждой, причем число таких серий очень велико. Вся совокупность измеренных значений характеризуется каким-то распределением со среднеквадратичным отклонением σ. В каждой серии имеется свое собственное среднее значение, и совокупность всех таких средних характеризуется своим распределением со среднеквадратичным отклонением σ_m. В реальном эксперименте мы,

конечно, имеем доло лишь с одной серией из n измерений и одним средним значением. Но мы хотим подчеркнуть, что эта серия представляет собой случайную выборку из полной совокупности отдельных измерений, а среднее значение есть лишь одно значение из полной совокупности средних. Величину σ_m называют *среднеквадратичной ошибкой среднего*, и мы будем рассматривать ее как меру ошибки среднего значения.

Величины σ и σ_m связаны простым соотношением. Действитольно, для одной серии n измерений имеем

$$E=\bar{x}-X=\frac{1}{n}\sum(x_i-X)=\frac{1}{n}\sum e_i. \tag{2.9}$$

Следовательно,

$$E^2=\frac{1}{n^2}\sum e_i^2+\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i \\ i\neq j}}\sum_{j} e_ie_j. \tag{2.10}$$

Усредним это выражение по всем сериям. Среднее величины $\sum e_i^2$ есть $n\ \langle e^2\rangle$. Среднее каждого члена двойной суммы равно нулю, поскольку ошибки e_i и e_j независимы и в среднем равны нулю. Итак, мы получаем следующее равенство:

$$\langle E^2\rangle=\frac{1}{n}\langle e^2\rangle. \tag{2.11}$$

По опроделению

$$\sigma_m^2=\langle E^2\rangle \quad \text{и} \quad \sigma^2=\langle e^2\rangle. \tag{2.12}$$

Тогда равенство (2.11) можно переписать в виде

$$\sigma_m=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{2.13}$$

т. е. среднеквадратичная ошибка среднего из n измерений в $\sqrt{n}$ меньше среднеквадратичной ошибки отдельного измерения.

Величина σ зависит только от точности отдельных измерений и не зависит от их числа, тогда как величину σ_m можно уменьшить, увеличив n. Но поскольку σ_m уменьшается всего лишь как $1/\sqrt{n}$, повторять много раз измерения одной и той же величины оказывается не очень

выгодным. Лучше попытаться уменьшить σ_m, снизив σ, т. е. повысив точность измерения.

б. Связь с выборочным средне квадратичным отклонением. Хотя соотношение (3.13) имеет очень важное значение, оно не позволяет нам вычислить σ_m, так как мы не знаем величины σ. Для этой величины лучше всего было бы взять значение $\{(1/n)\sum e_i^2\}^{1/2}$, но e_i — ошибки относительно истинного значения X и поэтому нам неизвестны. Данное затруднение можно обойти, если оперировать с *остатками*.

Для i-го измерения остаток дается равенством

$$d_i = x_i - \bar{x}. \tag{2.14}$$

В отличие от ошибки остаток — известная величина. Обозначим среднеквадратичное значение n остатков через s:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum d_i^2. \tag{2.15}$$

Величина s называется *выборочным среднеквадратичным отклонением*.

Из равенств (2.7) и (2.8) следует, что

$$x_i - \bar{x} = e_i - E. \tag{2.16}$$

Поэтому

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum (e_i - E)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum e_i^2 - 2E\frac{1}{n}\sum e_i + E^2 - \frac{1}{n}\sum e_i^2 - E^2. \tag{2.17}$$

Все это относится к одной серии n измерений. Усреднив, как и раньше, последнее равенство по большому числу серий, получим

$$\langle s^2\rangle = \sigma^2 - \sigma_m^2. \tag{2.18}$$

В силу равенств (2.13) и (2.18) имеем

$$\sigma^2 = \frac{n}{n-1}\langle s^2\rangle \tag{2.19}$$

и

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{n-1}\langle s^2\rangle. \tag{2.20}$$

Величина $\langle s^2\rangle$ нам не известна. В качестве ее наилучшей оценки выберем s^2. Подставляя эту величину в формулу (2.20) и извлекая квадратный корень, получаем

$$\sigma_m \approx \frac{s}{(n-1)^{1/2}}. \qquad (2.21)$$

Таким образом мы приближенно выразили величину σ_m через известные нам величины [1]).

На практике при вычислении s часто оказывается легче найти не остатки, т. е. отклонения показаний от среднего значения $\bar{x}$, а отклонения от другой величины $\tilde{x}$. Эту величину, так называемое *рабочее среднее*, обычно получают, округляя число $\bar{x}$. Обозначим через $S(x)$ — среднеквадратичное отклонение результатов измерения от $\tilde{x}$, т. е.

$$[S(x)]^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \tilde{x})^2. \qquad (2.22)$$

Тогда

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum (x_i - \tilde{x})^2 + 2(\tilde{x} - \bar{x})\frac{1}{n}\sum x_i + \bar{x}^2 - \tilde{x}^2,$$

т. е.

$$s^2 = [S(x)]^2 - (\bar{x} - x)^2. \qquad (2.23)$$

Итак, вычислив $S(x)$, можно легко найти и s.

Перепишем последнее равенство в виде

$$[S(x)]^2 = s^2 + (\bar{x} - \tilde{x})^2, \qquad (2.24)$$

чтобы выявить тем самым одно важное обстоятельство. Сумма квадратов отклонений в данной серии измерений достигает минимума, если отклонения берутся относительно среднего для данной серии. Вот почему s^2 не является несмещенной оценкой σ^2. Как показывает равенство (2.19), это несколько заниженная оценка.

---

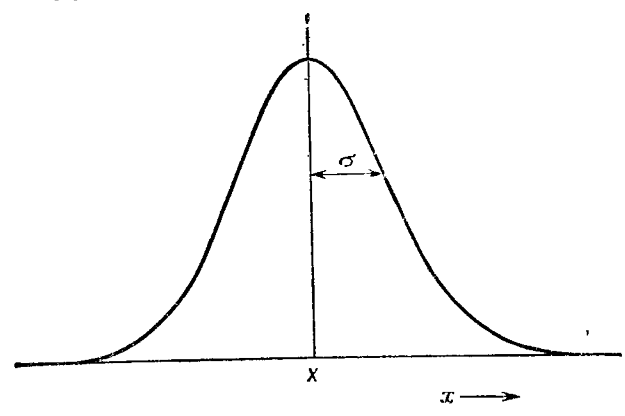
[1]) Равенство (2.21) выполняется лишь приближенно, поскольку значение его правой части зависит от выбранной серии n измерений и, вообще говоря, не может быть точно равным σ_m.

§ 4. Распределение Гаусса

а. Введение. Мы пока еще ничего не говорили относительно точного вида плотности распределения $f(x)$. Поэтому все полученные нами результаты справедливы независимо от вида распределения. Но чтобы двигаться дальше, необходимо знать точный вид этой функции. Мы выберем

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\sigma}\,e^{-(x-X)^2/2\sigma^2}. \qquad (2.25)$$

Эта функция задается двумя параметрами X и σ и носит название *функции Гаусса*, а соответствующее распределение называется *гауссовым* или *нормальным* распределением. Оно представлено на фиг. 5.



Фиг. 5. Гауссово распределение.
Точки перегиба расположены при $x = X \pm \sigma$.

Позже мы укажем, почему выбрано именно гауссово распределение, а пока просто отметим, что плотность такого распределения

1) симметрична относительно X,

2) достигает максимального значения в точке X,

3) быстро стремится к нулю, когда $|x - X|$ становится большим по сравнению с σ.

Очевидно, что по своим свойствам такая функция

вполне подходит, если речь идет о распределении результатов измерений при наличии только случайных ошибок.

В следующем параграфе будет показано, что параметр σ в формуле (2.25) в действительности представляет собой среднеквадратичное отклонение, чем и объясняется выбор его обозначения. Множитель взят для того, чтобы функ-

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma}$$

ция $f(x)$ удовлетворяла условию (2.1). В том, что она ему удовлетворяет, можно убедиться, взглянув на первый интеграл из табл. 2. (Формулы, представленные в таблице,

Таблица 2

Некоторые интегралы, связанные с гауссовым распределением	Некоторые интегралы, связанные с гауссовым распределением
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2}dx=\sqrt{2\pi}\sigma$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2/2\sigma^2}dx=\sqrt{2\pi}\sigma^3$
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2/2\sigma^2}dx=\sigma^2$	$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^4e^{-x^2/2\sigma^2}dx=3\sqrt{2\pi}\sigma^5$

выводятся в приложении 2.) Положим $X=0$, что не влияет на общность вывода. Тогда

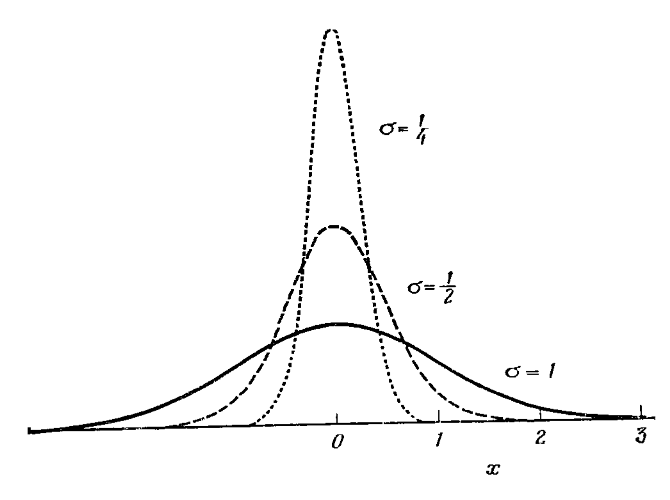
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx=1. \qquad (2.26)$$

б. Среднеквадратичное и среднее отклонения. Среднеквадратичное отклонение для распределения (2.25) можно найти, пользуясь третьей формулой табл. 2. По-прежнему будем полагать, что $X=0$. По определению,

$$(\text{среднеквадратичное отклонение})^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx=\sigma^2. \qquad (2.27)$$

Нетрудно убедиться, что в точках $x = \pm\sigma$ мы имеем точки перегиба функции $e^{-x^2/2\sigma^2}$, и это позволяет наглядно представить себе связь среднеквадратичного отклонения с формой гауссова распределения. На фиг. 6 приведено несколько гауссовых распределений с разными σ.



Фиг. 6. Гауссово распределение при $\sigma = 1,\ ^1/_2,\ ^1/_4$.
Величины σ и x взяты в одинаковых единицах. Площадь всех кривых одинакова.

Помимо среднеквадратичного отклонения, в качестве характеристики ширины распределения можно пользоваться и другой величиной, которая определяется как

$$\rho = \langle |e| \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x - X| f(x)\, dx \qquad (2.28)$$

и называется *средним* отклонением или средней ошибкой. Положительные значения $x - X$ взяты потому, что при наличии у этой разности обоих знаков интеграл будет равен нулю. Для гауссова распределения

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} \int_0^{\infty} x e^{-x^2/2\sigma^2}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \sigma, \qquad (2.29)$$

или

$$\frac{\sigma}{\rho}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}=1,253. \qquad (2.30)$$

в. Формула Питерса. Если предположить, что серия результатов $x_1, \ldots, x_n$ представляет собой случайную выборку из совокупности значений, подчиняющихся гауссову распределению, то можно вывести еще одну формулу для вычисления σ_m, более удобную, нежели формула (2.21).

Среднее значение суммы n остатков, взятых без учета их знака, равно

$$r=\frac{1}{n}\sum|d_i|. \qquad (2.31)$$

Рассмотрим распределение остатков для большого числа серий из n измерений. Каждая серия дает n остатков относительно среднего для данной серии. Среднеквадратичное отклонение для такого распределения равно $\langle s^2\rangle^{1/2}$, а среднее отклонение равно $\langle r\rangle$. Можно показать, что если результаты измерений имеют гауссово распределение, то отклонения от среднего тоже подчиняются гауссову распределению. Следовательно,

$$\frac{\langle s^2\rangle^{1/2}}{\langle r\rangle}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \qquad (2.32)$$

Из соотношений (2.20) и (2.32) следует, что

$$\sigma_m=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\langle r\rangle}{(n-1)^{1/2}}. \qquad (2.33)$$

В качестве наилучшей оценки $\langle r\rangle$ можно взять r, а $\sqrt{\pi/2}$ с хорошей степенью точности заменить на $^5/_4$. Тогда формула (2.33) примет вид

$$\boxed{\sigma_m\approx\frac{5}{4}\frac{r}{(n-1)^{1/2}}.} \qquad (2.34)$$

Это выражение для σ_m носит название *формулы Питерса.* Оно связывает среднеквадратичную ошибку среднего с величинами, известными из измерений, и тем самым позволяет легко вычислять ее. Когда нам потребуется подхо-

дящая статистическая оценка σ_m, мы будем пользоваться именно этой формулой. Пример ее применения можно найти на стр. 189.

Иногда необходимо знать среднеквадратичную ошибку отдельного измерения σ. Поскольку $\sigma = \sqrt{n}\sigma_m$, мы имеем

$$\sigma \approx \frac{5}{4}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{1/2} r. \qquad (2.35)$$

Полагая $[n(n-1)]^{1/2} \approx n - {}^1/_2$, можно записать последнюю формулу в виде, удобном для числовых расчетов:

$$\sigma \approx \frac{5}{4}\frac{\sum |d_i|}{n - {}^1/_2}. \qquad (2.36)$$

§ 5. Функция распределения

Допустим, что у нас имеется симметричное распределение с плотностью $f(x)$, для которого $X = 0$. Мы можем задать себе вопрос, какая доля $F(x)$ измеренных значений приходится на интервал от $-x$ до x. По определению, величина $f(x)$ — это доля показаний, приходящаяся на интервал от x до $x + dx$, и, следовательно,

$$F(x) = \int_{-x}^{x} f(y)\, dy. \qquad (2.37)$$

Функция $F(x)$ называется *функцией распределения*. Она численно равна площади участка, заштрихованного на фиг. 7, деленной на площадь всей кривой.

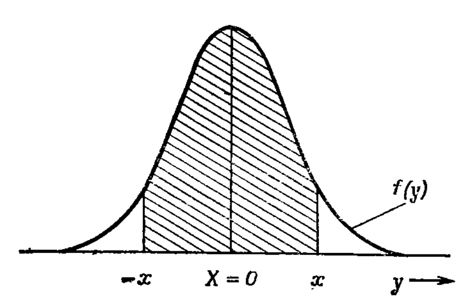
В случае гауссова распределения со среднеквадратичным отклонением σ

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma}\int_{-x}^{x} e^{-y^2/2\sigma^2}\, dy. \qquad (2.38)$$

Функция $F(x)$ зависит от σ. Удобно иметь таблицу значений, которой можно было бы пользоваться при любых значениях σ. Для этого вводят новую переменную $t = y/\sigma$. Тогда, положив $z = x/\sigma$, получим

$$F(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^z e^{-t^2/2}\,dt. \tag{2.39}$$

Функцию $F(z)$ можно рассчитать численно. В приложении 1 приведена таблица ее значений, а на фиг. 8 она представлена графически.



Фиг. 7. Доля $F(x)$ измеренных значений, лежащих в пределах $\pm x$, равна отношению площади заштрихованного участка к площади всей кривой $f(y)$.

Таблица 3

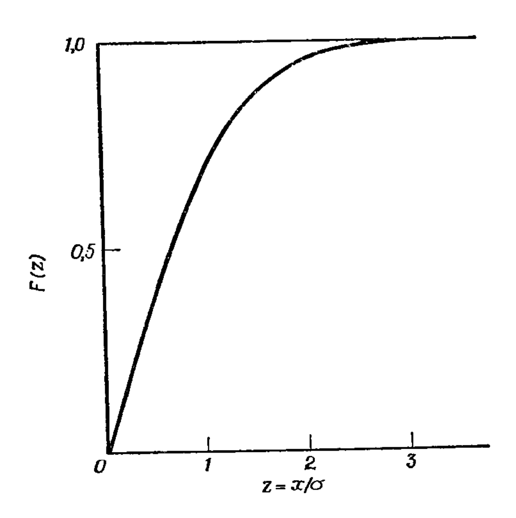
ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ $F(z)$ В СЛУЧАЕ ГАУССОВА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

$z = x/\sigma$	$F(z)$	Примерная доля результатов за пределами z
0	0	1
1	0,683	1/3
2	0,954	1/20
3	0,9973	1/400
4	0,99994	1/16000

В табл. 3 приведены некоторые специально выбранные значения $F(z)$. Стоит запомнить цифры третьего столбца. Мы видим, что в пределах $\pm\sigma$ заключено примерно две трети результатов. Это позволяет грубо про-

верять правильность вычисления величины σ. Вне интервала $\pm 2\sigma$ остается одна двадцатая часть результатов, а вне интервала $\pm 3\sigma$ — лишь одна четырехсотая часть.

Иногда, кроме σ, в качестве характеристики ошибок измерений указывают и другую величину, а именно *вероятную ошибку*. Это такое значение x, что половина



Фиг. 8. Функция распределения $F(z)$ в случае гауссова распределения.

всех результатов лежит в пределах $\pm x$ от истинного значения. В случае гауссова распределения вероятная ошибка равна $0{,}67\sigma$.

Но когда указывают две ошибки сходного типа, это мало что дает и удобнее, очевидно, остановиться на одной из них. Хотя смысл вероятной ошибки довольно прозрачен, она все же не является достаточно удобной характеристикой распределения, и в наше время обычно приводят только среднеквадратичную ошибку. В данной книге будет фигурировать именно она, а о вероятной ошибке мы упомянули лишь потому, что она может встретиться в старых книгах и статьях.

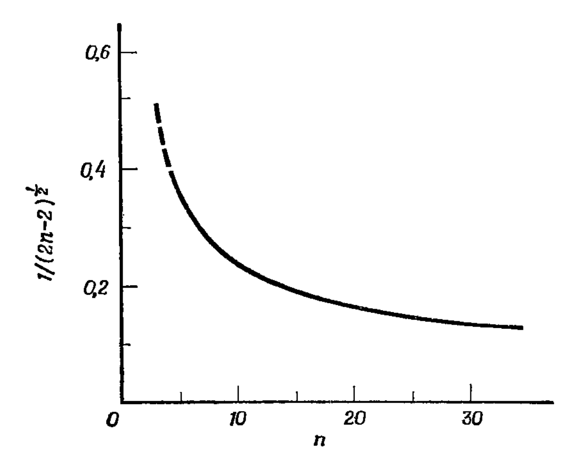
§ 6. Ошибка в величине ошибки

В § 3 было установлено, что наилучшей оценкой величины $\langle s^2 \rangle$ является s^2. Но величина s^2 получена в серии из n измерений. Интересно выяснить, как будет меняться s^2 от серии к серии.

Ошибка в величине s^2 равна

$$u = s^2 - \langle s^2 \rangle. \tag{2.40}$$

В приложении 3 показано, что в случае гауссова распределения среднеквадратичное значение этой ошибки есть



Фиг. 9. Кривая зависимости величины $1/(2n-2)^{1/2}$, равной относительному среднеквадратичному отклонению величины s, от n (числа результатов измерений).

$[2/(n-1)]\,\langle s^2 \rangle^2$. Следовательно, относительное среднеквадратичное отклонение s^2 равно $[2/(n-1)]^{1/2}$, а при достаточно большом n относительное среднеквадратичное отклонение s оказывается примерно вдвое меньшим, т. е. $[1/(2n-1)]^{1/2}$. [В случае гауссова распределения оно на 7% меньше относительного среднеквадратичного отклонения величины r [17]. Таким образом, формула Питерса для σ_m лишь немного хуже формулы (2.21).]

На фиг. 9 предсталвен график зависимости $1/(2n-2)^{1/2}$ от n. График предостерегает против излишней точности

при вычислении ошибок. Мы видим, например, что при $n = 9$ (т. е. при довольно значительном числе измерений) вычисленная ошибка будет верна лишь с точностью до 25%.

§ 7. О гауссовом распределении

По поводу применимости гауссова распределения в теории ошибок написано очень много. Но лучше всего сказал, пожалуй, тот, кто сказал, что экспериментаторы верят в него, полагаясь на доказательства математиков, а математики — полагаясь на экспериментальное обоснование. И тем не менее гауссово распределение можно в какой-то мере теоретически обосновать. Его, например, можно вывести, исходя из предположения, что в каждом результате измерения проявляется большое число независимых ошибок, малых, но конечных, примерно равных по величине и с равной вероятностью принимающих как положительные, так и отрицательные значения.

Предположение о справедливости гауссова распределения означает, что в качестве наилучшего значения измеряемой величины мы выбираем среднее из серии измерений. Выражение «наилучшее» здесь имеет следующий смысл. Пусть плотность распределения имеет вид $f(x - X)$, где, как обычно, X — истинное значение данной величины. Пусть ε — наименьшая величина, которую способен почувствовать измерительный прибор. (Мы полагаем величину ε малой, но это не меняет хода рассуждений.) Вероятность того, что в результате n измерений мы получим значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, равна

$$f(x_1 - X) f(x_2 - X) \ldots f(x_n - X) \varepsilon^n. \qquad (2.41)$$

Наилучшим будем называть такое значение X, которое, будучи подставлено в выражение (2.41), даст максимум, т. е. максимизирует вероятность получить данную серию измерений.

Нетрудно доказать, что если у нас гауссово распределение, то наилучшим значением величины X является среднее значение величин $x_1, \ldots, x_n$ и, наоборот, если наилучшим значением X является среднее, то распределение — гауссово [44].

Мы будем пользоваться только гауссовым распределением, хотя это отнюдь не означает, что все распределения в экспериментальной физике гауссовы. Явление, в котором в силу случайного процесса измеряемые величины изменяются дискретно — как при регистрации числа частиц в ядерной или атомной физике,— описывается распределением Пуассона. О нем говорится в приложении 4.

Результаты, полученные нами на основе предположения о гауссовом распределении, на самом деле слабо зависят от точного вида распределения. В § 6 мы видели, что независимо от вида распределения оценки ошибок в большинстве случаев оказываются довольно грубыми. Их неопределенностью полностью маскируются эффекты, обусловленные небольшими отличиями распределений от гауссова.

Главное, чтобы распределение а) было приемлемой формы и б) позволяло легко проводить вычисления. В большинстве случаев этому полностью удовлетворяет гауссово распределение. Поэтому, коль скоро измерения не будут с очевидностью ему противоречить, мы будем пользоваться гауссовым распределением. Самый обычный пример отклонения от гауссова распределения — случай, когда результаты измерения дискретны и соответствуют ближайшим делениям шкалы прибора. Этот случай рассмотрен в гл. 4.

Сводки обозначений и важнейших формул

А. *Серия из n измерений*

Известные величины:	
измеренные значения	$x_1, x_2, \ldots, x_n$,
среднее	$\bar{x} = (1/n)\,\Sigma x_i$,
остаток i-го измерения	$d_i = x_i - \bar{x}$,
выборочное среднеквадратичное отклонение	$s = [(1/n)\,\Sigma d_i^2]^{1/2}$,
выборочное среднее отклонение	$r = (1/n)\,\Sigma \mid d_i \mid$.
Неизвестные величины:	
истинное значение	X
ошибка i-го измерения	$e_i = x_i - X$,
ошибка среднего	$E = \bar{x} - X$.

Б. *Ошибки*

Отдельное измерение:
среднеквадратичная ошибка $\sigma = \langle e^2 \rangle^{1/2}$,
средняя ошибка $\rho = \langle |e| \rangle$.
Среднее для серии из n измерений:
среднеквадратичная ошибка $\sigma_m = \langle E^2 \rangle^{1/2}$.
Угловые скобки означают усреднение по распределению.

В. *Важные соотношения*:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$\sigma^2 = \frac{n}{n-1} \langle s^2 \rangle,$$

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{n-1} \langle s^2 \rangle.$$

Г. *Формулы для вычисления* σ *и* σ_m:
по s

$$\sigma_m \approx \left[\frac{\sum d_i^2}{n(n-1)} \right]^{1/2},$$

$$\sigma \approx \left[\frac{\sum d_i^2}{n-1} \right]^{1/2};$$

по r

$$\sigma_m \approx \frac{5}{4} \frac{\sum |d_i|}{n} \frac{1}{(n-1)^{1/2}},$$

$$\sigma \approx \frac{5}{4} \frac{\sum |d_i|}{n-{}^1/_2}.$$

Д. *Гауссово распределение*:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} e^{-(x-X)^2/2\sigma^2},$$

$$\frac{\sigma}{\rho} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Положим $X=0$. Доля результатов измерения, лежащая в пределах от x до $x+dx$, равна $f(z)\,dz$, где

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-z^2/2},\quad z=\frac{x}{\sigma}.$$

Доля результатов в интервале от $-x$ до x:

$$F(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^z e^{-t^2/2}\,dt.$$

Таблица значений функций $f(z)$ и $F(z)$ приведена в приложении 1.

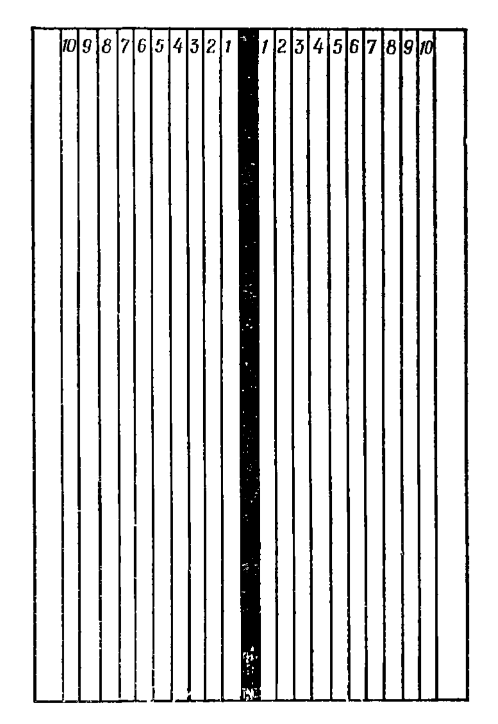
Упражнения

2.1. Опыт со стрелами и мишенью. Предлагаемый нами опыт поможет лучше уяснить себе основные результаты теории случайных ошибок. Когда подставляешь в формулы конкретные числа и видишь, к чему это практически приводит, формулы становятся как-то понятнее.

Измерения некоторой гипотетической величины можно имитировать, бросая стрелы в центральную вертикальную полоску мишени, изображенной на фиг. 10. Рекомендуемые размеры мишени: ширина каждой полоски 15 мм, длина — 0,5 м. Мишень должна стоять вертикально (либо с наклоном в несколько градусов назад) на мягкой подставке шириной и длиной 0,5 м. Бросать стрелы нужно с расстояния 2 м от мишени.

Для данного упражнения нужно взять 5 стрел и бросать их одну за другой в мишень, чтобы получить серию из 5 отсчетов. Независимо от результатов предыдущих бросков каждый раз цельтесь в среднюю полоску. Произведите 30 серий по 5 бросков, записывая как результат номер полоски, в которую попала стрела. Если стрела не попала в доску, ее следует бросить еще раз. Если же стрела попала вне полосок с номерами ± 10, надо измерить ее место попадания и вычислить соответствующий номер (несуществующей) полоски. Последующие вычисления вам будет легче проводить, если вы будете фиксировать результаты, ставя крестики на линиях графика, соответствующего мишени. Каждую серию из 5 бросков, отделяйте на графике горизонтальной чертой.

В итоге у вас будет 150 результатов измерения одной и той же величины. Обозначьте номер каждой полоски через x. Для упрощения арифметических расчетов можно принять, что истинное значение гипотетической величины равно нулю. Тогда ошибка каждого отсчета будет равна x



Фиг. 10. Мишень для опыта со стрелами.

и будет принимать целочисленные значения. (В этом упражнении мы имеем дело только с *ошибками*, а не с остатками.)

Предположение о нулевом истинном значении допустимо лишь при условии, что при бросании стрелы не вносится систематического смещения. Чтобы это проверить, вычислите величину $\langle x \rangle$ — среднее значение x по 150 броскам (см. примечания а и б). Если $\langle x \rangle$ выходит за пре-

делы от —0,5 до 0,5, перенумеруйте полоски так, чтобы нулевая из них была ближе всего к $\langle x \rangle$. Последующие вычисления надо проводить на основе новой нумерации. Такой способ устранения систематического сдвига позволяет упростить арифметические расчеты и обычно соответствует цели упражнения. Затем проведите следующие вычисления:

1. Найдите среднюю ошибку ρ, т. е. вычислите среднее всех 150 величин x без учета их знака. Затем найдите среднее $\bar{x}$ для каждой серии из 5 отсчетов. (При этом, конечно, нужно учитывать знак каждого x.) Как и в случае отдельных отсчетов, величина каждого среднего совпадает в то же время с его ошибкой. Тридцать средних значений по сериям составят совокупность средних. Вычислите среднюю ошибку ρ_m для этой совокупности, т. е. среднее из 30 величин $\bar{x}$ без учета знака, и сравните отношение ρ/ρ_m с его теоретическим значением $\sqrt{5}$ (см. примечания в и г).

2. Вычислите среднеквадратичную ошибку σ по 150 отсчетам и сравните отношение σ/ρ с величиной $\sqrt{\pi/2}$ — теоретическим значением для гауссова распределения.

3. Постройте гистограмму всех 150 результатов, показывающую частоту появления каждого из них. Используя полученное значение σ и значения $f(z)$, приведенные в приложении 1, постройте гауссово распределение и наложите его на гистограмму.

4. По значениям функции $F(z)$ из приложения 1 постройте график теоретической доли полного числа отсчетов, лежащей в пределах $\pm x$, и нанесите на него полученные экспериментальные величины. (Будьте аккуратны с их координатами x.)

Примечания

а. В гл. 2 мы пользовались обозначениями $\langle \ \rangle$, σ и ρ для величин, относящихся к набору очень большого числа отсчетов. Здесь мы пользуемся теми же самыми обозначениями, хотя у нас всего лишь 150 отсчетов. Но для целей упражнения такое число отсчетов можно считать достаточно большим.

б. Величины $\langle x \rangle$ и ρ можно вычислить одновременно. Подсчитаем, сколько раз встречалось каждое значение x_i. Вычислим

$A = \sum n_i x_i$ для всех положительных значений x_i,

$B = \sum n_i x_i$ для всех отрицательных значений x_i.

Тогда

$$\langle x \rangle = \frac{A - B}{N} \quad \text{и} \quad \rho = \frac{A + B}{N},$$

где

$$N = \sum n_i = 150.$$

в. Строго говоря, следовало бы вычислить σ — среднеквадратичную ошибку 150 отсчетов, и σ_m — среднеквадратичную ошибку 30 средних значений, сравнив затем σ/σ_m с величиной $\sqrt{5}$ [см. формулу (2.13)]. Но если и отдельные отсчеты и средние значения подчиняются распределению одного и того же вида, то

$$\frac{\sigma}{\rho} = \frac{\sigma_m}{\rho_m}.$$

Таким образом, хорошим приближением для σ/σ_m должна быть величина ρ/ρ_m, которую вычислить легче.

г. Каждое среднее значение имеет вид дроби $m/5$, где m — целое число. Для упрощения вычислений ρ_m можно вместо $m/5$ взять просто m и лишь конечный результат поделить на 5.

2.2. При измерении сопротивления катушки получены следующие значения:

Сопротивление, Ом
5,615
5,622
5,624
5,618
5,620
5,633
5,628
5,624
5,613

Подсчитайте наилучшее значение сопротивления, вычислите его среднеквадратичную ошибку и среднеквадратичную ошибку отдельного измерения.

2.3. Коэффициент теплопроводности меди при 0° С равен

$$k = 385{,}0 \text{ Вт}\cdot\text{м}^{-1}\cdot(°\text{C})^{-1}.$$

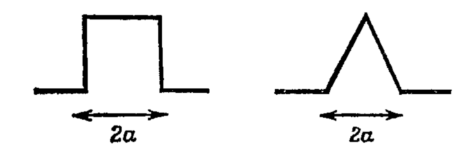
В результате большого числа измерений величины k (без систематических ошибок) получено гауссово распределение со среднеквадратичной ошибкой

$$\sigma = 15{,}0 \text{ Вт}\cdot\text{м}^{-1}\cdot(°\text{C})^{-1}.$$

Какова вероятность, что в отдельном измерении будет получено значение, лежащее в пределах

а) от 385,0 до 385,1, г) от 370,0 до 400,0,
б) от 400,0 до 400,1, д) от 355,0 до 415,0
в) от 415,0 до 415,1, е) от 340,0 до 430,0

(в единицах Вт·м$^{-1}$·(°C)$^{-1}$)?



Фиг. 11. Прямоугольное и треугольное распределения.

2.4. Найдите величины σ, ρ, σ/ρ для прямоугольного и треугольного распределений, представленных на фиг. 11.

ГЛАВА 3

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ СТАТИСТИКИ

§ 1. Функция случайных величин

В большинстве экспериментов интересующая нас величина непосредственно не измеряется. Вместо этого мы измеряем некоторые другие величины A, B, C и т. д., а затем вычисляем величину Z, которая является известной функцией указанных первичных величин. Например, измерить плотность d некоторого материала можно, измерив массу прямоугольного бруска M и его размеры l_x, l_y и l_z. Функциональная связь между искомой величиной d и первичными величинами M, l_x, l_y, l_z имеет вид

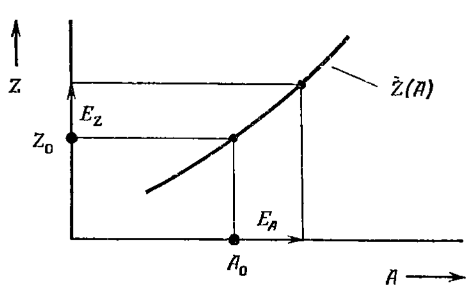
$$d = \frac{M}{l_x l_y l_z}. \qquad (3.1)$$

Допустим, что каждая первичная величина измерена несколько раз. В таком случае, скажем, для A мы найдем наилучшее значение $\bar{A}$, т. е. среднее из измеренных значений, и оценку его среднеквадратичной ошибки ΔA (последняя обозначалась в предыдущей главе через σ_m). Аналогичным образом найдем $\bar{B}$ и ΔB. Предположим, что измерения первичных величин независимы и поэтому их ошибки также независимы. Это значит, например, что в том случае, когда $\bar{A}$ велико, величина $\bar{B}$ с равной вероятностью может быть и большой, и малой. Зная величины $A = \bar{A}$, B $\bar{B}$ и т. д., можно вычислить наилучшее значение величины Z. Задача заключается в том, чтобы, зная среднеквадратичные ошибки ΔA, ΔB и т. д., вычислить среднеквадратичную ошибку ΔZ величины Z. Хотя мы рассматриваем только случай независимых измерений, вовсе не исключены и такие случаи, когда указанное допущение не имеет места. Способ нахождения величины ΔZ в подобных случаях зависит от характера связи между ошибками первичных величин. Общего правила указать невозможно. С примером связанных ошибок мы встретимся в упражнении 3.2.

а. Функция одной переменной. Рассмотрим сначала случай, когда Z — функция только одной величины A, например $Z = A^2$ или $Z = \ln A$. В общем виде запишем это так:

$$Z = Z(A). \tag{3.2}$$

(Здесь A — и наименование первичной величины, и ее значение.)



Фиг. 12. Ошибка E_Z в величине Z, обусловленная ошибкой E_A в величине A.

Если истинное значение первичной величины есть A_0, то истинное значение величины Z есть

$$Z_0 = Z(A_0) \tag{3.3}$$

(фиг. 12). Ошибка данного значения A равна

$$E_A = A - A_0, \tag{3.4}$$

и ей соответствует ошибка в величине Z, равная

$$E_Z = Z(A_0 + E_A) - Z(A_0) \approx \tag{3.5}$$

$$\approx \frac{dZ}{dA} E_A. \tag{3.6}$$

Производная dZ/dA взята в точке $A = A_0$. Знак приближенного равенства в формуле (3.6) связан с предположением, что ошибка A достаточно мала и в интервале измеренных значений A функцию $Z(A)$ можно представить прямой линией. Таким образом, ошибка в величине Z пропорциональна ошибке в величине A, причем коэффициент пропорциональности равен

$$c_A = \left(\frac{dZ}{dA}\right)_{A=A_0}. \tag{3.7}$$

Теперь допустим, что величина A изменяется в соответствии со своим распределением относительно $\bar{A}$, и возьмем среднее квадратичное от обеих частей равенства (3.6). Мы получим

$$\Delta Z = c_A \Delta A. \tag{3.8}$$

Отметим один важный случай, когда $Z = A^n$, так что $c_A = nA^{n-1}$. В этом случае

$$\frac{\Delta Z}{Z} = n\,\frac{\Delta A}{A}, \tag{3.9}$$

т. е. относительная среднеквадратичная ошибка в величине Z в n раз больше относительной среднеквадратичной ошибки в величине A. Ранее (гл. 2, § 6) мы уже пользовались этим соотношением при $n = {}^1/_2$.

б. Функция нескольких переменных. Рассмотрим теперь случай, когда Z — функция двух переменных A и B:

$$Z = Z(A, B). \tag{3.10}$$

Ошибки в величинах A и B таковы:

$$E_A = A - A_0, \qquad E_B = B - B_0, \tag{3.11}$$

где A_0 и B_0 — истинные значения величин A и B. Как и в предыдущем случае, предполагается, что в пределах измеренных значений Z можно приближенно считать линейной функцией A и B. Тогда ошибка в величине Z равна

$$E_Z = c_A Z_A + c_B Z_B, \tag{3.12}$$

где коэффициенты c_A и c_B даются выражениями

$$c_A = \frac{\partial Z}{\partial A}, \qquad c_B = \frac{\partial Z}{\partial B}. \tag{3.13}$$

Эти частные производные вычисляются в точках $A = A_0$ и $B = B_0$.

Из равенства (3.12) следует, что

$$E_Z^2 = c_A^2 E_A^2 + c_B^2 E_B^2 + 2c_A c_B E_A E_B. \tag{3.14}$$

Усредним обе части этого равенства по парам значений A и B из соответствующих им распределений.

Поскольку величины A и B предполагаются независимыми, среднее значение произведения $E_A E_B$ равно нулю. По определению,

$$(\Delta Z)^2 = \langle E_Z^2 \rangle,\ (\Delta A)^2 = \langle E_A^2 \rangle,\ (\Delta B)^2 = \langle E_B^2 \rangle. \tag{3.15}$$

Следовательно,

$$(\Delta Z)^2 = c_A^2 (\Delta A)^2 + c_B^2 (\Delta B)^2. \tag{3.16}$$

Теперь можно установить общее правило. Пусть Z — известная функция переменных A, B, C и т. д. Пусть среднеквадратичная ошибка в величине A равна ΔA и т. д. Тогда среднеквадратичная ошибка ΔZ в величине Z дается соотношением

$$(\Delta Z)^2 = (\Delta Z_A)^2 + (\Delta Z_B)^2 + (\Delta Z_C)^2 + \ldots, \tag{3.17}$$

где

$$\Delta Z_A = \left(\frac{\partial Z}{\partial A}\right) \Delta A \text{ и т. д.} \tag{3.18}$$

Выражения для ΔZ в ряде конкретных случаев приведены в табл. 4.

Таблица 4

ОПЕРАЦИИ НАД ОШИБКАМИ

Функциональная связь между Z и A, B	Соотношение между среднеквадратичными ошибками
$Z = A + B$, $Z = A - B$	$(\Delta Z)^2 = (\Delta A)^2 + (\Delta B)^2$ (I)
$Z = AB$, $Z = A/B$	$\left(\frac{\Delta Z}{Z}\right)^2 = \left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2$ (II)
$Z = A^n$	$\frac{\Delta Z}{Z} = n\frac{\Delta A}{A}$ (III)
$Z = \ln A$	$\Delta Z = \frac{\Delta A}{A}$ (IV)
$Z = e^A$	$\frac{\Delta Z}{Z} = \Delta A$ (V)

§ 2. Линейная зависимость

На опыте часто измеряют пары величин x и y, причем одна из них, y, является функцией другой, x. Затем найденные значения откладывают на графике и пытаются найти кривую, соответствующую алгебраической функции $y = y(x)$, которая проходила бы как можно ближе к точкам. Здесь мы ограничимся лишь случаем линейной функции

$$y = mx + c. \tag{3.19}$$

Задача состоит в том, чтобы найти параметры m и c, при которых прямая наилучшим образом проходила бы через экспериментальные точки.

Линейная зависимость очень широко распространена в физике. И даже когда зависимость нелинейная, обычно стараются строить график так, чтобы получить прямую линию. Например, если предполагают, что показатель преломления стекла связан с длиной световой волны λ соотношением

$$\mu = a + \frac{b}{\lambda^2}, \tag{3.20}$$

то на графике строят зависимость μ от $1/\lambda^2$.

Ниже приведены два метода нахождения наилучших, т. е. наиболее вероятных, параметров линии, проходящей через набор экспериментальных точек.

а. Метод наименьших квадратов. Это один из стандартных методов статистики. Допустим, что имеется n пар измеренных значений (x_1, y_1), (x_2, y_2), . . ., (x_n, y_n) (фиг. 13). Предположим, что ошибки содержат лишь величины y. (Такое предположение очень часто оправдывается на практике. В противном случае анализ существенно усложняется [17] [1].) В случае параметров m и c отклонение в i-м измерении составляет

$$y_i - mx_i - c. \tag{3.21}$$

Наилучшие значения m и c выбираются так, чтобы сумма

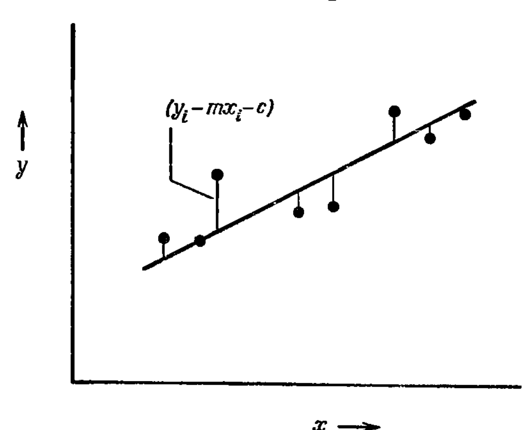
$$S = \sum (y_i - mx_i - c)^2 \tag{3.22}$$

---

[1]) См., например, *И. П. Клепиков, С. И. Соколов*, Анализ и планирование эксперимента методом максимума правдоподобия, М., 1965.— *Прим. ред.*

была минимальной [1]); отсюда и наименование: *метод наименьших квадратов.*

Принцип минимизации суммы квадратов отклонений был впервые предложен Лежандром в 1806 г. Мы уже



Фиг. 13. Метод наименьших квадратов.

В качестве прямой, наилучшим образом проходящей через точки, берется прямая, для которой величина $\sum (y_i - mx_i - c)^2$ минимальна.

видели, что в случае одной переменной этот принцип дает в качестве наилучшего значения среднее арифметическое.

Из формулы (3.22) следует, что

$$\frac{\partial S}{\partial m} = \sum \left[-2x_i (y_i - mx_i - c) \right] = 0, \qquad (3.23)$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = \sum \left[-2 (y_i - mx_i - c) \right] = 0. \qquad (3.24)$$

Таким образом, искомые величины m и c получаются решением системы уравнений

$$m \sum x_i^2 + c \sum x_i = \sum x_i y_i, \qquad (3.25)$$

---

[1]) Предполагается, что у всех точек одинаковый статистический вес. Случай неодинаковых весов рассматривается в следующем параграфе.

$$m\sum x_i+cn=\sum y_i. \qquad (3.26)$$

Второе уравнение показывает, что наилучшая прямая проходит через точку с координатами

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i, \quad \bar{y}=\frac{1}{n}\sum y_i, \qquad (3.27)$$

т. е. через центр тяжести всех экспериментальных точек. Из уравнений (3.25) и (3.26) находим

$$m=\frac{\sum (x_i-\bar{x})\,y_i}{\sum (x_i-\bar{x})^2}, \qquad (3.28)$$

$$c=\bar{y}-m\bar{x}. \qquad (3.29)$$

Подставляя эти значения параметров m и c в выражение (3.21), превращаем отклонения от прямой в остатки

$$d_i=y_i-mx_i-c. \qquad (3.30)$$

Среднеквадратичные ошибки в величинах m и c имеют вид

$$(\Delta m)^2\approx\frac{1}{D}\frac{\sum d_i^2}{n-2}, \qquad (3.31)$$

$$(\Delta c)^2\approx\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{D}\right)\frac{\sum d_i^2}{n-2}, \qquad (3.32)$$

$$D=\sum (x_i-\bar{x})^2. \qquad (3.33)$$

Доказательства этих формул приведены в приложении 5.

Если потребовать, чтобы прямая проходила через начало координат, то параметр m будет определяться уравнением (3.25) при $c=0$ и мы получим

$$m=\frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}. \qquad (3.34)$$

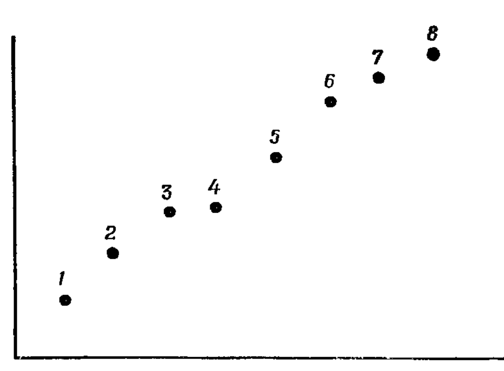
Его среднеквадратичная ошибка дается равенством

$$(\Delta m)^2\approx\frac{1}{\sum x_i^2}\frac{\sum d_i^2}{n-1}. \qquad (3.35)$$

б. Метод парных точек. Без помощи ЭВМ или настольной счетной машины суммирование в формулах

(3.25) и (3.26) трудно выполнить. Ниже излагается более простой метод, который часто оказывается вполне удовлетворительным. Он особенно хорош в том случае, когда значения x эквидистантны.

Допустим, что у нас имеется 8 точек, лежащих приблизительно на одной прямой. Требуется найти наилучшее значение тангенса угла наклона m и его ошибку. Пронумеруем точки по порядку от 1 до 8 (фиг. 14). Возьмем точки 1 и 5; ими определяется некоторая прямая



Фиг. 14. Простой метод оценки наклона наилучшей прямой.

Каждая пара точек (1—5, 2—6 и т. д.) дает некоторое значение наклона. Среднее из них берут в качестве наилучшего значения.

и, следовательно, угол ее наклона. Рассматривая точно так же другие пары точек, получим в итоге четыре значения тангенса угла наклона. В качестве наилучшего значения m выберем среднее $\overline{m}$ и обычным способом найдем его среднеквадратичную ошибку.

Такой метод дает удовлетворительные результаты лишь тогда, когда величины $(x_5 - x_1)$, $(x_6 - x_2)$, $(x_7 - x_3)$, $(x_8 - x_4)$ примерно одинаковы. В противном случае статистический вес четырех значений тангенса угла наклона будет неодинаковым.

Полученная прямая линия будет иметь угловой коэффициент $\overline{m}$ и проходить через точку $\overline{x}$, $\overline{y}$ (нам уже известно, что прямая, найденная методом наименьших квадратов,

всегда проходит через эту точку). Изложенным методом пользуются в основном тогда, когда требуется определить лишь наклон прямой.

§ 3. Взвешивание результатов

Допустим, что некоторая величина измерена несколько раз, например 10, и получены значения $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. Представим себе, что вся серия разбита на две группы и мы вычисляем среднее в каждой из них. Например, мы провели 7 измерений утром и вычислили их среднее

$$z_1 = \frac{1}{7}(x_1 + x_2 + \ldots + x_7), \tag{3.36}$$

а затем еще 3 измерения днем с соответствующим средним

$$z_2 = \frac{1}{3}(x_8 + x_9 + x_{10}). \tag{3.37}$$

Наилучшим значением для 10 измерений будет

$$\bar{z} = \frac{1}{10}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}), \tag{3.38}$$

что, очевидно, не совпадает с простым средним величин z_1 и z_2. Если бы мы все же захотели использовать эти величины, то нам пришлось бы написать

$$\bar{z} = \frac{7z_1 + 3z_2}{10}. \tag{3.39}$$

Числа 7 и 3 называются *статистическим весом* величин z_1 и z_2.

В общем случае, если имеется N величин $z_1, z_2, \ldots, z_N$ со статистическим весом $w_1, w_2, \ldots, w_N$, то наилучшее значение дается формулой

$$\bar{z} = \frac{\sum w_i z_i}{\sum w_i}. \tag{3.40}$$

Если все веса w_i умножить на одну и ту же константу, то величина $\bar{z}$ не меняется. Таким образом, важны лишь отношения величин w_i.

Пусть теперь имеется N измеренных значений величины z, каждое со своей среднеквадратичной ошибкой:

$$z_1 \pm \Delta z_1,\ z_2 \pm \Delta z_2,\ \ldots,\ z_N \pm \Delta z_N.$$

Какой вес следует приписать каждому значению z_i, чтобы получить наилучшее значение z из этих измерений? Ответ содержится в простом примере, рассмотренном в начале параграфа. Мы видели, что если z_i — среднее n_i измеренных значений, то его вес w_i пропорционален n_i. При этом предполагалось, что все первоначальные значения обладают одинаковыми весами, т. е. все они соответствуют одному и тому же распределению с определенной среднеквадратичной ошибкой σ. Поэтому мы рассматриваем каждое z_i как среднее n_i первоначальных значений распределения со среднеквадратичной ошибкой σ и, таким образом, каждому z_i приписывается вес n_i.

Величина σ нам не известна. Ее можно выбрать совершенно произвольно, но, фиксировав ее, мы находим n_i из соотношения

$$\Delta z_i = \frac{\sigma}{\sqrt{n_i}}. \tag{3.41}$$

Таким образом,

$$w_i = n_i = \frac{\sigma}{(\Delta z_i)^2}. \tag{3.42}$$

Среднеквадратичная ошибка в величине $\bar{z}$ равна $\sigma/\left(\sum n_i\right)^{1/2}$.

Из формул (3.40) и (3.42) можно найти наилучшее значение $\bar{z}$ и его среднеквадратичную ошибку:

$$\frac{\sum (1/\Delta z_i)^2 z_i}{\sum (1/\Delta z_i)^2} \pm \frac{1}{\left[\sum (1/\Delta z_i)^2\right]^{1/2}}. \tag{3.43}$$

Величина σ, как и следовало ожидать, в это выражение не входит.

В § 2 был указан способ проведения наилучшей прямой через ряд точек равного веса методом наименьших квадратов. Обобщение этого метода на случай неодинаковых весов не составляет труда. Если паре (x_i, y_i) соответствует вес w_i, то следует минимизировать сумму

$$S_w = \sum w_i (y_i - m x_i - c)^2. \tag{3.44}$$

Уравнения относительно m и c приобретают вид:

$$m \sum w_i x_i^2 + c \sum w_i x_i = \sum w_i x_i y_i, \quad (3.45)$$

$$m \sum w_i x_i + c \sum w_i = \sum w_i y_i. \quad (3.46)$$

Выражения для m и c, а также их среднеквадратичных ошибок содержатся в приводимой сводке данных.

Сводка формул для нахождения параметров прямой линии методом наименьших квадратов

Исходные данные: n точек (x_i, y_i).

Случай одинаковых статистических весов

Прямая $y = mx + c$.

$$m = \frac{1}{D} \sum (x_i - \bar{x}) y_i, \qquad (\Delta m)^2 \approx \frac{1}{D} \frac{\sum d_i^2}{n-2},$$

$$c = \bar{y} - m\bar{x}, \qquad (\Delta c)^2 \approx \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{D}\right) \frac{\sum d_i^2}{n-2},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i, \qquad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i,$$

$$D = \sum (x_i - \bar{x})^2, \qquad d_i = y_i - mx_i - c.$$

Прямая $y = mx$.

$$m = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}, \qquad (\Delta m)^2 \approx \frac{1}{\sum x_i^2} \frac{\sum d_i^2}{n-1},$$

$$d_i = y_i - mx_i.$$

Случай неодинаковых статистических весов

Прямая $y = mx + c$.

$$m = \frac{1}{D_w} \sum w_i (x_i - \bar{x}) y_i, \qquad (\Delta m)^2 \approx \frac{1}{D_w} \frac{\sum w_i d_i^2}{n-2},$$

$$c = \bar{y} - m\bar{x}, \qquad (\Delta c)^2 \approx \left(\frac{1}{\sum w_i} + \frac{\bar{x}^2}{D_w}\right) \frac{\sum w_i d_i^2}{n-2},$$

$$\bar{x} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}, \qquad \bar{y} = \frac{\sum w_i y_i}{\sum w_i},$$

$D_w = \sum w_i (x_i - \bar{x})^2,$ $d_i = y_i - mx_i - c.$

Прямая $y = mx$.

$$m = \frac{\sum w_i x_i y_i}{\sum w_i x_i^2}, \qquad (\Delta m)^2 \approx \frac{1}{\sum w_i x_i^2} \frac{\sum w_i d_i^2}{n-1},$$

$d_i = y_i - mx_i$.

Упражнения

3.1. В следующих примерах величина Z — функция независимо измеренных величин A, B и т. д. Вычислите Z и среднеквадратичную ошибку ΔZ по заданным значениям $A \pm \Delta A$, $B \pm \Delta B$, ...

а) $Z = A^2$, $A = 25 \pm 1$;

б) $Z = A - 2B$, $A = 100 \pm 3$, $B = 45 \pm 2$;

в) $Z = \frac{A}{B}(C^2 + D^{3/2})$, $A = 0{,}100 \pm 0{,}003$, $B = 1{,}00 \pm 0{,}05$, $C = 50{,}0 \pm 0{,}5$, $D = 100 \pm 8$;

г) $Z = A \ln B$, $A = 10{,}00 \pm 0{,}06$, $B = 100 \pm 2$;

д) $Z = 1 - \frac{1}{A}$, $A = 50 \pm 2$.

3.2. Измеряя длину ребер l_x, l_y, l_z прямоугольного блока, определяют его объем V. По разбросу значений этих размеров установлено, что среднеквадратичная ошибка составляет 0,01%. Какова среднеквадратичная ошибка в величине V, если разброс обусловлен а) неточностями установки измерительного инструмента и ошибками отсчета его показаний и б) колебаниями температуры?

3.3. Посредине стального стержня, концы которого закреплены, подвешен груз весом W. В средней точке стержня измеряется его прогиб при помощи циферблатного индикатора, показания которого обозначены через y.

Получены следующие результаты:

W, кг	y, мкм	W, кг	y, мкм
0	1642	$2^1/_2$	781
$^1/_2$	1483	3	590
1	1300	$3^1/_2$	426
$1^1/_2$	1140	4	263
2	948	$4^1/_2$	77

а) Нанесите эти точки на график и на глаз проведите через них наилучшую прямую. Пользуясь прозрачной линейкой, попробуйте установить пределы возможных наклонов прямой и тем самым угадать величину среднеквадратичной ошибки наклона.

б) Вычислите наилучшее значение тангенса угла наклона и его среднеквадратичную ошибку методом парных точек; проведите прямую с таким наклоном через точку $\bar{x}$, $\bar{y}$. Сравните полученный результат с оценками, сделанными в пункте а.

в) Вычислите наилучшее значение тангенса угла наклона и его среднеквадратичную ошибку, пользуясь методом наименьших квадратов. Сравните полученный результат с результатом, полученным в пункте б.

3.4. В таблицах Коэна и Дю Монда [4] приведены четыре наиболее точных результата измерения скорости света c:

Таблица 5

Экспериментатор	Год	c, км/с	Среднеквадратичная ошибка
Бергстранд	1951	299793,1	0,3
Фрум	1954	299793,0	0,3
Бергстранд	1957	299792,85	0,16
Фрум	1958	299792,50	0,10

Вычислите взвешенное среднее этих величин и среднеквадратичную ошибку.

ГЛАВА 4

ОШИБКИ И ЗДРАВЫЙ СМЫСЛ

§ 1. Практическое вычисление ошибок

Итак, мы уже в состоянии вычислять среднеквадратичные ошибки измерения для широкого класса экспериментов. Кратко повторим полученные результаты. Окончательная величина Z является функцией первичных величин A, B, C и т. д., которые либо измеряются непосредственно на опыте, либо, как в рассмотренных примерах, представляют собой параметры прямых линий (тангенс угла наклона и отрезок, отсекаемый на оси ординат), проведенных через экспериментальные точки.

Если интересующая нас величина измеряется непосредственно, то в качестве наилучшего значения выбирается среднее из нескольких результатов, а среднеквадратичную ошибку вычисляют по формуле Питерса. (В данной главе мы опустим слово среднеквадратичная. Фактические ошибки измеряемых величин мы не будем рассматривать, а под ошибкой всегда будем подразумевать среднеквадратичную ошибку, т. е. среднеквадратичное отклонение для того распределения, которому подчиняется полученное на опыте значение.) Если искомая величина — наклон прямой или отрезок, отсекаемый ею на оси ординат, то сама величина и ее ошибка находятся либо методом наименьших квадратов, либо методом парных точек в сочетании с формулой Питерса.

Наилучшее значение и ошибку в величине Z вычисляют по наилучшим значениям и ошибкам первичных величин в соответствии с правилами, указанными в табл. 4, или в общем виде по формулам (3.17) и (3.18).

Часто приходится измерять большое число первичных величин, и можно подумать, что вычисление ошибки каждой из них и ошибки величины Z — весьма трудоемкое дело. Так в действительности у многих и получается. Учащиеся автоматически применяют к каждой серии измерений формулу Питерса, проводят объединение всех

ошибок согласно формальным правилам, не учитывая их величины, и запутываются в сложных расчетах, в результате которых ошибка вычисляется с большим числом ничего не значащих десятичных знаков, к тому же обычно неверно на несколько порядков из-за арифметических ошибок в ходе вычислений.

Чтобы было понятно, как надо поступать на практике, вспомним прежде всего, зачем оцениваются ошибки. Ошибка должна показывать, в какой мере значим конечный результат. На практике лишь в редких случаях требуется вычислять ошибки с точностью, превышающей 25%. Часто нас устраивает даже точность 200%. Примем все же 25% как произвольную, но достаточную точность вычисления ошибки окончательного результата.

а. Объединение ошибок. Если взглянуть на формулу (3.17) для сложения ошибок, то мы увидим, что благодаря возведению в квадрат одни ошибки могут оказаться пренебрежимо малыми по сравнению с другими. Для примера рассмотрим случай, когда

$$Z = A + B, \tag{4.1}$$

положив $\Delta A = 2$ и $\Delta B = 1$. Из табл. 4 (см. формулу I) следует, что

$$(\Delta Z)^{*} = (2^2 + 1^2)^{1/2} = 2{,}24. \tag{4.2}$$

Таким образом, несмотря на то, что ΔB составляет половину от ΔA, пренебрегая величиной ΔB, мы получаем $\Delta Z \approx \Delta A = 2$, что лишь на 12% отличается от полной ошибки. Когда Z представляет собой сумму нескольких величин, пренебрегать ошибками, составляющими половину максимальной, было бы, пожалуй, слишком смело, но почти всегда можно отбрасывать ошибки, не превышающие одной трети от максимальной.

Возможен также случай, когда сами величины сильно различаются между собой. Пусть, например, в формуле (4.1) величина B представляет собой малую поправку, а именно:

$$A = 100 \pm 6,$$
$$B = 5 \pm ?.$$

Ошибкой в величине B можно пренебречь, если она не превышает 3, что составляет 60% от B. Таким обра-

зом, ошибку в величине B следует учитывать только тогда, когда величина B измерена слишком грубо.

При умножении и делении измеряемых величин (см. формулу II табл. 4) складываются квадраты не абсолютных, а относительных ошибок. Поэтому в подобных случаях можно пренебречь всеми относительными ошибками, не превышающими одной трети от максимальной.

б. Существенные и несущественные ошибки. С учетом сказанного выше вновь вернемся к вопросу об оценке ошибок первоначальных величин. Мы можем называть величину *вносящей* или *не вносящей* ошибку в зависимости от того, вносит или не вносит ее ошибка заметный вклад в ошибку окончательного результата. Величина может оказаться не вносящей ошибку либо потому, что достаточно точно измерена, либо потому, что представляет собой малую добавку к большой величине.

Если у нас есть основания считать некоторую величину не вносящей ошибку, то ее ошибку достаточно оценить весьма грубо, но обязательно с завышением. Необходимость завышения очевидна. Это гарантирует нам, что мы законно пренебрегаем такой ошибкой. Если завышенная ошибка оказывается впоследствии пренебрежимо малой, можно быть спокойным. Если же нет,— следует вернуться к измерениям и определить ошибку более тщательно.

Рассмотрим, например, результаты многократного взвешивания одного и того же образца:

$$\begin{aligned}&50{,}3853\ \text{г},\\&50{,}3846\ \text{г},\\&50{,}3847\ \text{г},\\&50{,}3849\ \text{г}.\end{aligned}$$

За наилучшее значение веса примем

$$50{,}3849 \pm 0{,}0003\ \text{г}.$$

Мы считаем, что данная серия измерений была самой точной в нашем опыте, и поэтому оцениваем ошибку просто на глаз. Мы видим, что в пределах ошибки 0,0003 г лежат три из четырех результатов, т. е. зта величина почти наверняка больше ошибки среднего.

в. Когда нельзя применять формулу Питерса. Мы только что рассмотрели пример, в котором можно было

просто оценить ошибку без вычислений по формуле Питерса. Как правило, эту формулу не стоит применять в тех случаях, когда у нас менее четырех результатов, ибо в подобных случаях ошибка содержит такую неопределенность, что вместо соотношения (2.34) вполне допустимо пользоваться простым соотношением

$$\sigma_m \approx r. \tag{4.3}$$

В этом случае вычисления не помогут уточнить ошибку, необходимо еще несколько раз повторить измерения.

Еще один случай, когда ошибку следует оценивать из общих соображений,— это измерение, в котором показания прибора всякий раз округляют до ближайшего деления шкалы, так что разброс показаний либо мал, либо вовсе отсутствует. Рассмотрим, например, две серии результатов измерения длины, проводившегося при помощи линейки:

а)	б)
325 мм	325 мм
325	325
325	325
325	325,5
	325
	325

В обоих случаях можно утверждать лишь, что измеренная величина равна 325 ± 0,5 мм [1]). И вновь, если нужно более точное значение ошибки, нам ничего не дадут ни дополнительные выкладки, ни дополнительные измерения того же рода. Нужно либо оценивать на глаз долю целого деления шкалы, либо взять более точный прибор, например катетометр.

г. Систематические ошибки. До сих пор мы говорили только об оценке случайных ошибок. Во многих экспериментах большего и не требуется. Что же касается любой систематической ошибки, то на нее следует ввести поправку и тем самым либо вовсе ее устранить, либо по крайней мере сделать пренебрежимо малой. Обычно бывает достаточно, чтобы она была малой по сравнению со случайными

---

[1]) Многие в подобных случаях весьма серьезно применяют формулу Питерса, получая а) 325 ± 0 мм, б) 325 ± 0,08 мм.

ошибками. Тогда она окажется несущественной и ее можно будет не учитывать при вычислении ошибки окончательного результата.

В тех случаях, когда оставшиеся систематические ошибки не малы по сравнению со случайными ошибками, нужен особый подход. Один из возможных путей — попытаться вычислить для каждой величины, вносящей систематическую ошибку, нечто вроде среднеквадратичной ошибки, т. е., скажем, величину, в пределах которой истинное значение заключено с вероятностью 0,67. К примеру, мы могли бы вычислить или как-то разумно оценить верхний предел ошибки, а затем поделить его на 2. (Такая оценка может показаться очень грубой, но уж лучше иметь грубую оценку, нежели никакой.) Тогда все ошибки можно комбинировать, как если бы они были случайными и независимыми. Но в конце полезно выяснить, какую долю полной ошибки окончательного результата составляют действительно случайные ошибки и какую — различные систематические.

д. Окончательная ошибка. Теперь можно подвести итог. Систематические ошибки по возможности устраняют. Существенные случайные ошибки вычисляют по формуле Питерса или иным подходящим методом. Остальные ошибки грубо оценивают с некоторым завышением и проверяют — часто в уме,— действительно ли они пренебрежимо малы. Затем все существенные ошибки объединяют согласно правилам табл. 4 и получают окончательную ошибку. Эта величина представляет собой наилучшую оценку среднеквадратичного отклонения для распределения результатов, которые должны получаться при многократном повторении эксперимента с одними и теми же или сходными приборами. Таким образом, она служит мерой общей *воспроизводимости* результата.

Некоторые экспериментаторы, найдя обычным путем полную ошибку, вводят затем по своему усмотрению тот или иной коэффициент, чтобы учесть возможные, но не известные ему систематические ошибки. Это в высшей степени нежелательно. Ведь другим подобное субъективное завышение вряд ли что даст. Лучше вычислять ошибки по возможности честно и оставлять такими. Если впоследствии окажется, что «истинное» значение измеренной

величины отличается от полученного вами на несколько ваших же ошибок, вы вправе испытывать или не испытывать чувство вины. Но как бы вам ни хотелось избежать подобной ситуации, вы все же не должны произвольно удваивать или утраивать ошибку. Не говоря уже о неудобстве, связанном с неопределенностью конечной ошибки, при этом могут оказаться затушеванными реальные расхождения между вашими данными и данными других экспериментаторов или между теорией и экспериментом.

Принято указывать не относительную (в процентах), а абсолютную ошибку окончательного результата. Окончательное значение измеренной величины и ее ошибку следует приводить с одинаковым числом десятичных знаков, имеющим реальный смысл. Как правило, ошибку приводят с одной значащей цифрой, но если это 1 или 2, то можно привести и вторую значащую цифру. Из того, что нам не требуется оценивать окончательную ошибку точнее, следует, что и все вычисления ошибок нужно проводить только с одной или, самое большее, двумя значащими цифрами.

§ 2. Сложные функции

Вычисление величин типа $\partial Z/\partial A$ в формуле (3.18) подчас оказывается весьма затруднительным. В качестве примера рассмотрим случай, когда, измеряя угол стеклянной призмы A и угол минимального отклонения D, определяют показатель преломления μ стекла. Показатель преломления можно найти по формуле

$$\mu = \frac{\sin {}^1/_2 (A+D)}{\sin {}^1/_2 A}. \tag{4.4}$$

Ошибка в величине μ дается соотношением

$$(\Delta\mu)^2 = (\Delta\mu_A)^2 + (\Delta\mu_D)^2, \tag{4.5}$$

где $\Delta\mu_A$ — ошибка в величине μ, обусловленная ошибкой ΔA в величине A, а именно:

$$\Delta\mu_A = \left(\frac{\partial\mu}{\partial A}\right) \Delta A. \tag{4.6}$$

Аналогичный смысл имеет и $\Delta\mu_D$.

Напишем выражения для $\partial\mu/\partial A$ и $\partial\mu/\partial D$:

$$\frac{\partial\mu}{\partial A}=\frac{1}{2}\,\frac{\cos{}^1/_2\,(A+D)}{\sin A/2}-\frac{1}{2}\,\frac{\sin{}^1/_2\,(A+D)}{\sin A/2\,\mathrm{tg}\,A/2}, \qquad (4.7)$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial D}=\frac{1}{2}\,\frac{\cos{}^1/_2\,(A+D)}{\sin A/2}. \qquad (4.8)$$

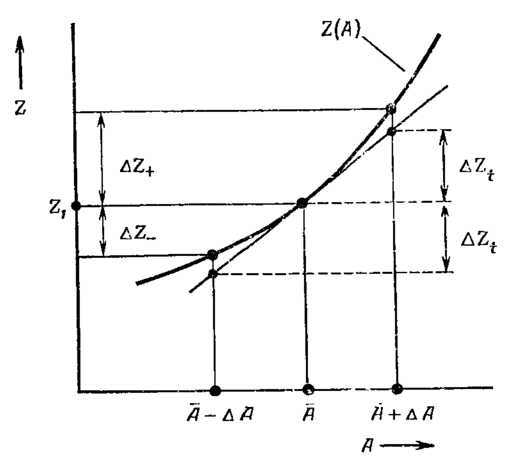
Эти величины нужно вычислить при $A=\bar{A}$, измеренном значении A, и $D=\bar{D}$, измеренном значении D. Если все выкладки проведены верно, а величины ΔA и ΔD выражены в радианах, то мы получим правильный ответ для $\Delta\mu_A$ и $\Delta\mu_D$.

Но существует и более быстрый метод. Вспомним, каков смысл величины $\Delta\mu_A$. Это изменение величины μ при изменении A на ΔA и при постоянном D. Таким образом, ее можно вычислить по формуле (4.4), сначала подставляя $A=\bar{A}$ и $D=\bar{D}$, а затем $A=\bar{A}+\Delta A$ и $D=$ $=\bar{D}$. Разность дает $\Delta\mu_A$. Точно так же можно найти $\Delta\mu_D$, если вычислить μ еще при $A=\bar{A}$ и $D=\bar{D}+\Delta D$. Для этого нужна всего лишь таблица синусов. Нам не надо проводить каких-либо алгебраических или арифметических выкладок, в ходе которых так легко ошибиться, и даже не понадобится переводить ΔA и ΔD в радианы. Объединение ошибок $\Delta\mu_A$ и $\Delta\mu_D$ производится обычным способом.

Хотя такой способ позволяет вычислять $\Delta\mu_A$ и $\Delta\mu_D$ значительно быстрее, чем при формальном подходе, не следует думать, что он в какой-то мере менее строгий или менее точный. Как правило, оба метода дают одинаковые результаты, а когда это не так, формальный метод оказывается хуже. Это видно из фиг. 15, где представлены результаты, полученные тем и другим методом в случае некоторой функции $Z=Z(A)$. Наилучшее значение A равно $\bar{A}$ и соответствует Z_1. При формальном методе мы находим ошибку ΔZ_t, которая определяется касательной к кривой $Z(A)$ в точке $\bar{A}$, Z_1. Здесь же указана ошибка ΔZ_+, полученная более простым, прямым методом. Точно так же можно получить и ошибку ΔZ_-, соответствующую значению $\bar{A}-\Delta A$.

Кривизна кривой $Z(A)$ в пределах $\bar{A}\pm\Delta A$ обычно не столь велика, как это изображено на фиг. 15. Поэтому

разница между ΔZ_t, ΔZ_+ и ΔZ_- оказывается пренебрежимо малой. Но если кривизна значительна, то принимать отклонения в обе стороны одинаковыми было бы



Фиг. 15. Связь между разными оценками ΔZ.

неверно. Вместо этого следовало бы вычислить ΔZ_+ и ΔZ_- и конечный результат представить в виде

$$Z = Z_1 {}^{+\Delta Z_+}_{-\Delta Z_-}.$$

Но такое уточнение редко бывает необходимым. Главное в том, что, вычисляя погрешность в величине Z, обусловленную погрешностью в величине 1, мы не можем ошибиться, если просто вычислим значения Z для $\bar{A}$ и $\bar{A}+$ $+\Delta A$, полагая остальные измеренные величины постоянными. А это нередко позволяет сократить длительные расчеты.

§ 3. Ошибки и методика эксперимента

Если интересующая нас величина Z связана с непосредственно измеряемыми величинами A и B соотношением

$$Z = AB \quad \text{или} \quad \frac{A}{B},$$

то ошибка на $x\%$ в величине A или B приводит к ошибке на те же $x\%$ в величине Z. Таким образом, величины A и B следует измерять примерно с одинаковой точностью, хотя бы они и сильно различались. Другое дело, когда

$$Z = A + B \text{ или } Z = A - B.$$

Здесь все зависит от того, сильно ли разнятся величины A и B. Рассмотрим такой пример:

Случай I

$$A = 10\,000 \pm 1,$$
$$B = 100 \pm 5,$$
$$Z = A + B = 10\,100 \pm 5.$$

В данном случае большая величина A известна с высокой точностью, тогда как величина B измерена лишь с точностью 5%. Окончательная же величина Z при этом определяется с точностью 0,05%. Мы видим, что для достижения требуемой точности большую величину нужно измерять точнее, а малую добавку — с меньшей точностью.

Теперь рассмотрим

Случай II

$$A = 100 \pm 2,$$
$$B = 96 \pm 2,$$
$$Z = A - B = 4 \pm 3.$$

Обе непосредственно измеряемые величины определены с точностью 2%, а точность конечной величины оказывается равной 75%. Таким образом, вычисляя разность двух близких независимо измеренных величин, мы сталкиваемся с принципиальной неприятностью: окончательная ошибка сильно возрастает. Значит, нужно по возможности найти иной метод измерения Z.

В следующих двух главах мы приведем примеры экспериментальных методов, которые позволяют использовать преимущества случая I и избегать случая II. Эти примеры показывают, как учет ошибок измерения оказывает влияние непосредственно на методику эксперимента.

А теперь рассмотрим один гипотетический пример. Допустим, что требуется определить величину $Z = A/B$. Проведена серия измерений и найдено:

$$A = 1000 \pm 20,$$
$$B = 10 \pm 1.$$

Следовательно, $\Delta A/A = 2\%$, $\Delta B/B = 10\%$, а $\Delta Z/Z = (2^2 + 10^2)^{1/2} = 10{,}2\%$.

Предположим, что у нас есть еще резерв времени, который позволяет снизить ошибку измерения одной из величин, скажем, вдвое. Какой из них отдать предпочтение? Если это время затратить на измерение величины A, то получим $\Delta A/A = 1\%$, что приведет к $\Delta Z/Z = (1^2 + 10^2)^{1/2} = 10{,}0\%$. Если же уточнить B, то в результате получим $\Delta B/B = 5\%$, а значит, $\Delta Z/Z = (2^2 + 5^2)^{1/2} = 5{,}4\%$. Итак, в первом случае окончательная ошибка мало изменилась, а во втором она уменьшилась почти вдвое. Мораль такова: основное внимание нужно всегда уделять тем величинам, которые дают наибольший вклад в окончательную ошибку.

Вообще говоря, необходимо так планировать эксперимент, чтобы ни одна из величин не вносила в конечный результат ошибки, значительно превышающей ошибки остальных величин. В приведенном примере очевидно, что измерения, в которых $\Delta B/B$ было в 5 раз больше, чем $\Delta A/A$, плохо спланированы; на измерения величины B следовало бы затратить больше времени, сократив время измерения величины A. Конечно, дополнительные измерения не всегда могут приводить к снижению ошибки. Тем не менее каждый раз при планировании эксперимента следует помнить о том, что желательно снизить ошибки, вносящие наибольший вклад.

Упражнения

4.1. Масса прямоугольного латунного стержня со сторонами a, b, c равна M. Известно, что момент инерции I относительно оси, проходящей через центр грани ab перпендикулярно ей, равен:

$$I = \frac{M}{12}(a^2 + b^2).$$

В результате измерений получены следующие значения:

$$M = 135{,}0 \pm 0{,}1 \text{ г},$$
$$a = 80 \pm 1 \text{ мм},$$
$$b = 10 \pm 1 \text{ мм},$$
$$c = 20{,}00 \pm 0{,}01 \text{ мм}.$$

Чему равна относительная (в процентах) среднеквадратичная ошибка а) плотности вещества ρ и б) момента инерции I?

4.2. Если к одному концу проволочного подвеса радиусом r и длиной l приложен момент сил C, то угол закручивания подвеса φ дается выражением

$$\varphi = \frac{2lC}{n\pi r^4},$$

где n — модуль упругости материала проволоки. Из опыта получено:

$$\frac{\varphi}{C} = 4{,}00 \pm 0{,}12 \text{ рад} \cdot \text{н}^{-1} \cdot \text{м}^{-1},$$
$$r = 1{,}00 \pm 0{,}02 \text{ мм},$$
$$l = 500 \pm 1 \text{ мм}.$$

Вычислите модуль упругости n и соответствующую среднеквадратичную ошибку.

4.3. При помощи оборотного маятника Кейтера можно определить ускорение силы тяжести g из соотношения

$$\frac{8\pi^2}{g} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{H} + \frac{T_1^2 - T_2^2}{h_1 - h_2},$$

где T_1 — период колебаний относительно одного из ножей, h_1 — расстояние от этого ножа до центра тяжести маятника, а T_2 и h_2 — те же величины относительно другого ножа. Величина H, равная $h_1 + h_2$,— расстояние между ножами, которое измеряется непосредственно. Результаты измерений таковы:

$$T_1^2 = 4{,}01715 \pm 0{,}00020 \text{ с}^2, \quad H = 1{,}00000 \pm 0{,}00004 \text{ м},$$
$$T_2^2 = 4{,}00915 \pm 0{,}00020 \text{ с}^2, \quad h_1 = 0{,}700 \pm 0{,}001 \text{ м},$$
$$h_2 = 0{,}300 \pm 0{,}001 \text{ м}.$$

Определите величину g и соответствующую среднеквадратичную ошибку.

4.4. Вычислите показатель преломления и соответствующую среднеквадратичную ошибку в случае стеклянной призмы, если известно, что

угол призмы $A = 60^\circ\, 18' \pm 10'$,

угол минимального отклонения $D = 35^\circ\, 46' \pm 20'$.

4.5 Частота колебаний камертона ν связана с длиной его ножек L и модулем Юнга материала, из которого он сделан, Y, следующим образом:

$$\nu \sim \sqrt{YL}.$$

При повышении температуры на 10° С частота звучания камертона падает на (0,250 ± 0,002)%. При этом модуль Юнга уменьшается на (0,520 ± 0,003)%. Вычислите коэффициент линейного расширения α материала, из которого сделан камертон. Определите соответствующую среднеквадратичную ошибку. Хорош ли такой метод определения коэффициента линейного расширения?

Часть II
Экспериментальные методы

ГЛАВА 1
НЕКОТОРЫЕ ЛАБОРАТОРНЫЕ ПРИБОРЫ И МЕТОДЫ

§ 1. Введение

В данной главе мы изложим некоторые общие принципы, которыми руководствуются при проведении измерений. Эти принципы позволяют, во-первых, выбрать наиболее подходящий метод и, во-вторых, наиболее эффективно его использовать. Последнее подразумевает необходимость добиться максимально возможной при данном методе точности или воспроизводимости результатов и — что еще важнее — устранить характерные для такого метода систематические ошибки.

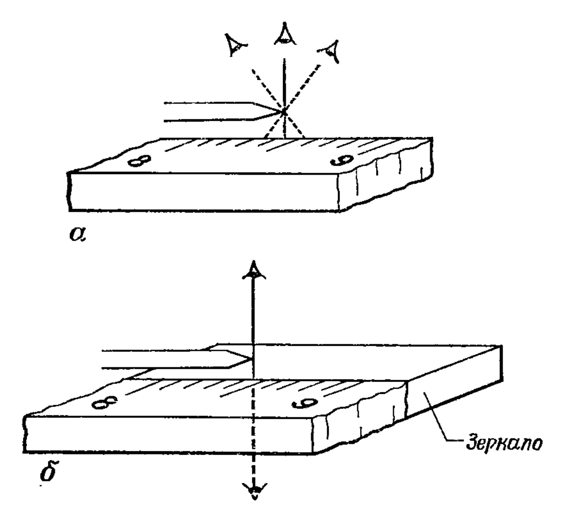
Мы проиллюстрируем различные положения на примере ряда типичных приборов или методов. Они взяты из разных разделов физики, и мы здесь не претендуем ни на систематичность, ни на полноту охвата. Просто нам хотелось, чтобы, увидев, как применяются общие принципы в этих случаях, вы смогли самостоятельно разобраться и в других ситуациях. Правда, как и всегда, ничто не в состоянии заменить практического опыта, хотя опыт без осмысливания — это медленный и трудный способ приобретения знаний. Поэтому, обращая ваше внимание на те или иные стороны методики измерения, мы надеемся сделать более полезным приобретаемый вами опыт.

§ 2. Измерительная линейка

Начнем с едва ли не самого простого измерительного устройства — измерительной линейки. Ее достоинства — в простоте изготовления и удобстве использования. Ли-

нейка позволяет получать результаты с точностью примерно до 0,2 мм. Но чтобы добиться такой точности, требуется избежать определенных ошибок.

а. Ошибка, обусловленная параллаксом. Если измеряемый предмет находится на некотором расстоянии от шкалы и если мы смотрим не под прямым углом к шка-



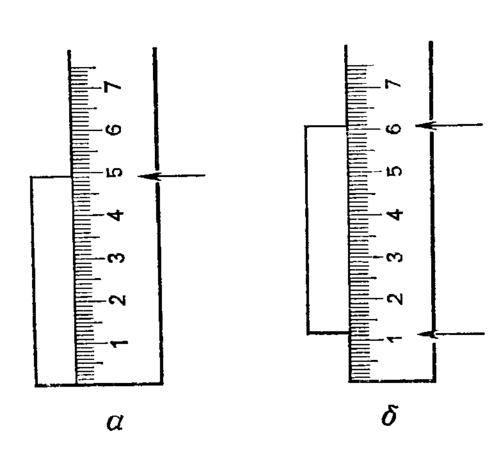
Фиг. 16. Ошибка параллакса.

а — величина отсчета зависит от положения глаза; *б* — зеркало, расположенное рядом со шкалой, позволяет производить отсчет точно под прямым углом к шкале.

ле, то отсчет будет неверным (фиг. 16, *а*). Такая ошибка возможна при пользовании не только линейкой, но и любым прибором со стрелкой, перемещающейся по шкале, и называется ошибкой параллакса. Ее удается уменьшить, по возможности приближая к шкале измеряемый предмет или стрелку, а также используя зеркало, расположенное рядом со шкалой (фиг. 16, *б*). Совмещая предмет с его отражением в зеркале, мы обеспечиваем прямой угол между линией зрения и шкалой.

б. Ошибка отсчета нуля. Располагать линейку так, чтобы ее край совпадал с одним концом предмета, и отсчитывать показания у другого конца (фиг. 17, *а*) — такой

способ годится только для грубых измерений длины. Вместо этого предмет следует располагать таким образом (фиг. 17, *б*), чтобы можно было снимать показания у обоих концов. Дело в том, что край линейки может оказаться испорченным или нулевая отметка поставлена неверно. Вообще всегда в любом приборе следует с некоторым подозрением относиться к нулевому делению шкалы. Подоб-



Ф и г. 17. Два способа измерения длины предмета.

а — плохой способ. Если край линейки испорчен, то вносится систематическая ошибка; *б* — хороший способ: длина измеряемого предмета определяется по двум отсчетам.

ной ошибки удается избежать, как уже указывалось, если брать разность двух отсчетов.

в. Калибровка. Шкала на линейке может быть нанесена неправильно. Поэтому линейку следует поверить, или откалибровать. Сделать это можно, просто совмещая ее с более точной эталонной линейкой и сличая их показания.

Здесь имеется определенная логика, которую важно себе уяснить. Обычная линейка дешево стоит потому, что сделана из дешевого материала — дерева — да и шкала наносится без особых стараний. Эти факторы всегда сопутствуют друг другу, ибо нет смысла наносить доста-

точно точную шкалу на дерево — материал, способный со временем изменять свою длину.

Допустим, что в лаборатории имеется, скажем, 20 экспериментаторов, которым требуется измерять длины примерно в 500 мм с точностью 0,1 мм. Мы могли бы снабдить каждого из них стальной линейкой, размеченной с такой точностью. Но такая линейка значительно дороже обычной деревянной, разметка которой, вероятно, едва ли обеспечивает точность 0,5 мм по всей длине. (Пластмассовые линейки намного хуже и часто дают погрешность в 1%.) Возможен и другой вариант: снабдить каждого обычной линейкой и приобрести в качестве эталона для лаборатории одну дорогую. При таком варианте расходы были бы в несколько раз меньше. Измерения же при этом можно будет проводить с требуемой точностью, если каждый экспериментатор не забудет о необходимости калибровки. Таким образом, вариант

много дешевых линеек + один дорогой эталон + калибровка,

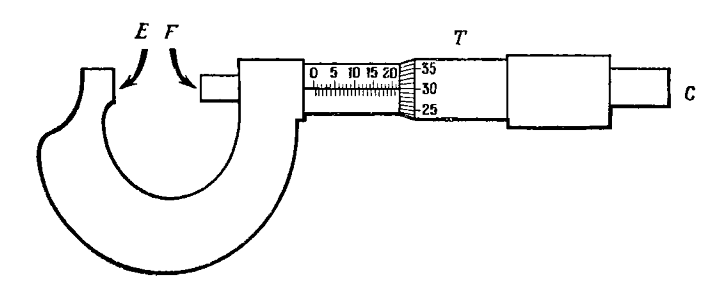
очевидно, более выгоден.

Если в ходе опыта вам потребуется только определенный участок линейки, то участок этот следует особенно тщательно сравнивать с эталоном. Неправильная разметка остальной части линейки при этом не будет иметь значения. Правда, практически маловероятно, чтобы одна часть линейки была размечена менее точно, чем другая. Но, вообще говоря, при калибровке прибора наиболее тщательно это следует делать в том диапазоне, где он действительно используется.

§ 3. Микрометр

Этот прибор позволяет измерять внешние размеры предметов, если они не превышают примерно 100 мм. На фиг. 18 изображен типичный микрометр. Подвижный шпиндель представляет собой винт с шагом резьбы, рав-

ным 0,5 мм так, что один полный оборот барабана T соответствует перемещению винта на 500 мкм. Микрометр



Фиг. 18. Микрометр.

позволяет без труда измерять размеры с точностью 10 мкм, т. е. в 20 раз точнее линейки. Существуют и более точные микрометры с ценой деления 1 мкм.

Отметим следующее:

а. Точность здесь повышается благодаря применению винтового механизма — весьма эффективного способа осуществлять тонкое поступательное перемещение.

б. Элемент произвола в величине приложенного к барабану вращательного момента при соприкосновении винта F с предметом устранен благодаря наличию храповика. Барабан следует вращать, прикладывая усилие не к нему самому, а к выступающей сзади «трещотке» C. Она передает усилие только до тех пор, пока оно не достигает определенной величины. Когда же эта величина достигнута при соприкосновении с предметом, дальнейшее вращение происходит «вхолостую» и не изменяет показаний микрометра. Таким образом, окончательный результат измерения всегда соответствует постоянному давлению винта F на предмет.

в. В микрометре возможна ошибка нулевого отсчета, которую следует устранить, приводя в соприкосновение поверхность F с поверхностью E и отмечая соответствующее показание.

г. Показания микрометра можно проверить при помощи калибровочных плиток — прямоугольных призм из

высокосортной закаленной стали. Торцовые грани призм плоскопараллельны, расстояние между ними известно с точностью 0,1 мкм и обозначено на каждой плитке.

§ 4. Измерение длины — выбор метода

В двух предыдущих параграфах были рассмотрены два способа измерения длины. Мы не собираемся подробно излагать какие-либо другие методы, а вместо этого рассмотрим вопрос об измерении длины с самых общих позиций.

Прежде всего надо решить, что мы имеем в виду, когда говорим о длине. В основном мы это довольно хорошо себе представляем, когда речь идет о предметах, скорость которых мала по сравнению со скоростью света и которые можно видеть (или почти видеть) в лабораторных условиях (или вблизи Земли и Солнца); речь идет о длинах, скажем, в интервале от 10^{-8} до 10^{11} м. Но если предмет движется со скоростью, сравнимой со скоростью света, или если мы попытаемся расширить интервал длин до размеров атомов и элементарных частиц или до расстояний, отделяющих нас от звезд и галактик, то нам придется указать, что мы понимаем в этом случае под длиной и расстоянием,— ведь нельзя же приложить линейку к атомному ядру или достать ее концом до звезды. Мы должны сказать что-нибудь в таком роде: «если мы проводим такой-то эксперимент, то результат оказывается таким, как если бы нечто простиралось на такое-то расстояние или находилось на таком-то расстоянии от нас». Подобные *рабочие* определения иногда приводят к понятиям длины и расстояния, отличающимся от наших обычных представлений. Но последние основаны на наблюдениях или соображениях, касающихся длин в весьма ограниченном интервале значений. Поэтому не следует слишком удивляться, если они оказываются неприменимыми, когда этот интервал становится необычайно большим.

Проблемы определения понятия и измерения длины в предельных случаях выходят за рамки нашей книги. Мы ограничимся той областью длин, где применимы повсе

дневные представления. Но не вредно заметить вообще (и об этом не следует забывать), что в основе *всех* измерений лежит — обычно неявное — определение измеряемой величины.

Даже ограничив себя измерениями длин в интервале от 1 мкм до 1 м, мы столкнемся с выбором целого ряда приборов. К решению вопроса, каким из них воспользоваться, следует подходить с учетом следующего:

а) какова природа длины, которую мы хотим измерить; к примеру, что это — расстояние между двумя метками или между концами стержня или бруска или это диаметр отверстия или стержня;

б) какова примерно эта длина,

в) какова требуемая точность измерения.

Таблица 6

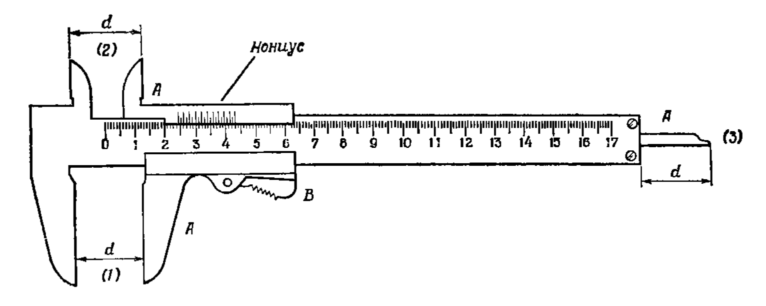
ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕКОТОРЫХ ПРИБОРОВ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ДЛИНЫ

Прибор	Предел измерения, м	Точность, мкм	Характер применения
Измерительная линейка	1	200	Общий
Штангенциркуль	0,1	50	Наиболее пригоден для измерения внешних размеров предметов, а также для измерения ширины зазора, диаметра отверстия
Катетометр	1	10	Общий
Микрометр	0,1	2	Измерение внешних размеров
Измерительный микроскоп	0,2	1	Общий

В табл. 6 перечислены пять возможных методов измерения длины в рассматриваемом интервале значений.

Штангенциркуль изображен на фиг. 19. Катетометр представляет собой зрительную трубу, которая может

перемещаться по жесткой вертикальной стойке с делениями. Измерительным микроскопом называется прибор, в котором величина перемещения микроскопа от одного положения реперного креста на предмете или метке до другого указывается на ручке винта, управляющего перемещением. (В таком приборе возможна ошибка за счет «люфта». Из-за наличия зазоров в движущихся частях



Ф и г. 19. Штангенциркуль.

Детали *A* — это части одного ползунка, который можно перемещать вдоль шкалы, нажав пружинный фиксатор *B*. Три размера *d* одинаковы и отсчитываются при помощи нониуса по шкале. *1* — диаметр стержня, *2* — диаметр отверстия, *3* — глубина выемки.

показания зависят от того, с какой стороны вы подводите реперный крест к нужной точке объекта. Чтобы избежать такой ошибки, нужно подводить микроскоп всегда с одной стороны.) В таблице указаны примерная область применения, точность и характер измерения для каждого из перечисленных приборов.

Конечно, выбрав нужный прибор, мы должны правильно провести сами измерения. В теории мы имеем дело, например, с цилиндрическим стержнем, о котором известно, что его диаметр равен d мм, и этим все исчерпано. На практике же следует убедиться, действительно ли стержень цилиндрический, или — еще правильнее — указать пределы, в которых можно это принять. Таким образом, сначала нужно измерить диаметр в одном и том же месте в различных направлениях. Затем необходимо повторить это в разных местах по длине стержня. Естественно, тщательность подобного исследования, как всегда, определяется той целью, которую преследуют

измерения. Точно так же, прежде чем определять расстояние между противоположными торцами стержня, следует проверить, в какой мере они параллельны.

Скажем вкратце, как можно расширить диапазон и повысить точность измерения длины. Последнего можно добиться, используя явление оптической интерференции. Аналогичные явления для самых различных типов волн — световых, рентгеновских, электронных, нейтронных — позволяют расширить область измерения длин в сторону малых значений. Еще один способ измерить изменение длины основан на изменении емкости плоского конденсатора при смещении одной его пластины относительно другой [23]. Что касается измерений длин в области больших значений, то здесь применим метод триангуляций. Огромные космические расстояния определяют косвенно и с различной степенью достоверности по таким данным, как данные о видимой яркости звезд [33].

Физики из всего извлекают свою выгоду. Они изыскивают физические явления, зависящие от величин, которые требуется измерить. Из множества приборов, основанных на таких явлениях, они выбирают тот, который лучше всего подходит по точности и пределам измерений.

§ 5. Измерение длины — влияние температуры

При точных измерениях длины необходимо учитывать тепловое расширение. Прежде всего это относится к измеряемым предметам. Пусть, например, требуется измерить длину трубки при температуре жидкого водорода (20 K). Если бы мы измерили эту длину при комнатной температуре и не внесли поправку на расширение, то допустили бы серьезную ошибку. В данном случае при вычислении поправки нельзя считать, что коэффициент расширения не зависит от температуры, надо знать его значения в интервале от 300 до 20 K.

Во-вторых, следует выяснить, не влияет ли тепловое расширение на показания самого прибора, используемого для измерения длины. И наконец, если мы калибруем прибор, измеряя эталонную длину, например, калибровочной плитки, то надо проверить, насколько может отли-

чаться ее истинная длина от номинальной из-за теплового расширения.

Таблица 7

КОЭФФИЦИЕНТ ЛИНЕЙНОГО РАСШИРЕНИЯ α НЕКОТОРЫХ МАТЕРИАЛОВ

Материал	α, 10^{-6} (°C)$^{-1}$
Медь	17
Латунь	19
Сталь	11
Инвар	1
Стекло	9
Стекло «пирекс»	3
Плавленый кварц	0,5
Дерево — вдоль волокон	4
поперек волокон	50

В табл. 7 приведены значения коэффициента линейного расширения α для ряда наиболее распространенных материалов. Эти значения округлены и соответствуют комнатной температуре (20° С). Инвар — это стальной сплав, содержащий 36% никеля; его главное достоинство — очень низкий коэффициент расширения при комнатной температуре, а поэтому он часто применяется в тех случаях, когда требуются именно такие свойства. При более высоких температурах его значение α возрастает. Как вещество с наименьшим расширением выделяется плавленый кварц; приведенное для него значение α можно использовать вплоть до температуры 1000° С. Кроме того, кварц отличается очень большой стабильностью размеров. Поэтому он часто используется в тонких экспериментах, где требуется строго выдерживать геометрические размеры при минимальной зависимости их от температуры.

Посмотрим теперь на приведенные в таблице данные. В ней представлен широкий набор материалов. Для большинства твердых тел при комнатной температуре величина α заключена в пределах $(5 - 25) \cdot 10^{-6}$ (°C)$^{-1}$. Если

в качестве типичного значения принять 10^{-5} (°C)$^{-1}$, то мы получим, что изменение температуры на 10° С приводит к изменению длины на 0,01%.

В практической физике крайне важно иметь представление о таких порядках величины. С одной стороны, не учтя в точных опытах изменений размеров за счет температуры, мы допускаем серьезную ошибку. С другой стороны, вычисляя для каждого измерения поправку на температурный эффект, мы потеряли бы, очевидно, массу времени. Об этом говорит здравый смысл. Но он не в состоянии сказать, когда по мере возрастания точности эксперимента такой эффект надо будет учитывать. Вот здесь и приходит на помощь подсчет порядка величин. Он подсказывает, что при изменениях температуры меньше чем на 10° С не следует опасаться влияния температуры, пока точность измерений не превышает 10^{-4}.

§ 6. Измерение частоты методом биений

а. Явление биений. Пусть имеются две синусоидальные волны с равными амплитудами A и слегка различающимися частотами ν_1 и ν_2. Мы не конкретизируем физическую природу этих волн. Они, к примеру, могут возникать в результате пространственных смещений колеблющейся механической системы или изменения напряжения на конденсаторе в схеме генератора. Каковой бы ни была природа волн, их можно представить в виде отдельных колебаний

$$y_1 = A \cos 2\pi\nu_1 t, \quad y_2 = A \cos 2\pi\nu_2 t, \tag{1.1}$$

что и изображено графически на фиг. 20, *а* и *б*. При одновременном воздействии обеих волн полное смещение таково:

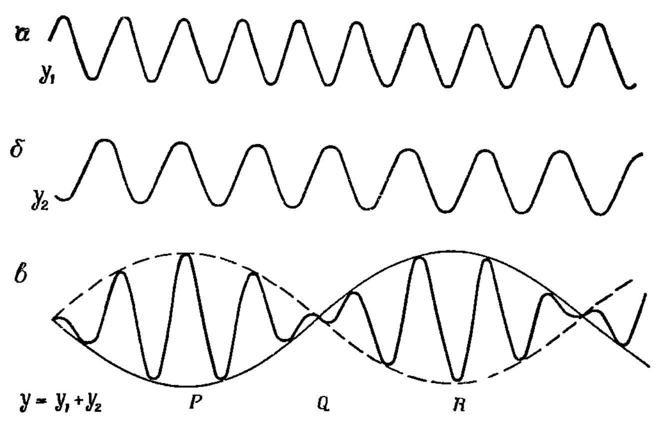
$$y = y_1 + y_2 = A(\cos 2\pi\nu_1 t + \cos 2\pi\nu_2 t) = \\ = 2A \cos 2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t \cos 2\pi \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} t. \tag{1.2}$$

Допустим теперь, что величины ν_1 и ν_2 весьма близки друг к другу, т. е. что

$$\nu_1 - \nu_2 \ll \nu_1 + \nu_2. \tag{1.3}$$

В таком случае множитель $\cos 2\pi\left[\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)t\right]$ в формуле (1.2) описывает быстрое синусоидальное колебание, амплитуда которого медленно изменяется в соответствии с множителем $2A \cos\left[2\pi\left(\frac{\nu_1-\nu_2}{2}\right)t\right]$. Это результирующее колебание изображено на фиг. 20, *в*.

Даже не прибегая к помощи выражения (1.2), выведенного на основании тригонометрических формул, мож-



Фиг. 20. Биения колебаний.
Волны *а* и *б*, немного различающиеся по частоте, при сложении дают волну *в*.

но, взглянув на фиг. 20, наглядно убедиться, что волны *а* и *б* при сложении дают волну *в*. В момент времени *P* фаза обеих волн одинакова и результирующая амплитуда велика. Затем из-за небольшого различия частот эти волны постепенно расходятся по фазе, так что к моменту времени *Q* разность фаз достигает 180°, а результирующая амплитуда обращается в нуль. В момент времени *R* обе волны вновь имеют одинаковые фазы. Такое явление попеременного усиления и ослабления результирующих колебаний носит название *биений*, а частота появления максимума в результирующей амплитуде называется *частотой биений*.

Пунктирная линия на фиг. 20, *в* соответствует колебанию с частотой $(\nu_1 - \nu_2)/2$. Но за каждый период амплитуда достигает максимума дважды. Поэтому частота биений равна

$$\nu_b = \nu_1 - \nu_2. \qquad (1.4)$$

Это важный результат.

*б. **Измерение частоты.*** Явление биений можно использовать в качестве очень точного метода измерения частоты колебаний ν источника, в частности электромагнитных волн. В случае волн такого типа можно создать эталонный источник, частота колебаний которого ν_0 известна с высокой точностью. Если «смешать» эту эталонную волну с неизвестной волной и измерить частоту биений ν_b, то

$$\nu = \nu_0 \pm \nu_b. \qquad (1.5)$$

Точность такого метода очень высока, если имеется эталонный источник колебаний с частотой ν_0, близкой к ν. В этом случае ν_b мало и для очень точного определения ν вполне достаточно измерять частоту биений со сравнительно невысокой точностью. Вспомните случай I из примера, приведенного на странице 63.

Если, скажем,

$$\nu_0 = 1\,000\,000 \text{ Гц} \quad \text{и} \quad \nu = 500 \pm 5 \text{ Гц}^{1)},$$

то

$$\nu = 1\,000\,500 \pm 5 \text{ Гц}. \qquad (1.6)$$

Иными словами, при точности измерения ν_b, равной 1/100, точность ν равна 1/200 000.

Для измерения ν_b необходимо прежде всего извлечь из результирующей волны y (фиг. 20, *в*) тот сигнал, который эквивалентен положительной огибающей. Такой процесс называется детектированием [2]. Затем частоту этого сигнала можно измерить обычным методом, например превращая сигнал в серию импульсов — по одному на каждый период — и подсчитывая число импульсов за известный интервал времени.

---

[1]) Частоту определяют как число периодов в секунду, а в качестве единицы измерения частоты используется герц (Гц).

Выше при вычислении величины ν (1.6) мы произвольно взяли знак плюс в формуле (1.5). Какой же знак следует брать на самом деле? Возможны два способа решения этого вопроса. Первый: измерить величину ν приближенно и выяснить — больше она или меньше ν_0. В приведенном примере для этого было бы достаточно провести измерение с точностью, немного лучшей $5 \cdot 10^{-4}$. Второй: знак можно установить, слегка изменив величину ν_0 (скажем, повысив) и наблюдая при этом — возрастет или уменьшится ν_b.

в. Эталоны частоты. Заметим, что в ошибку конечного результата не вошла ошибка в величине ν_0. Это объясняется тем, что частота эталонных источников известна с очень высокой точностью. Действительно, частоту — или обратную ей величину (время) — можно поддерживать и измерять с более высокой точностью, нежели любую другую физическую величину [14].

Существует несколько методов создания колебаний стандартной частоты. Простейший из них состоит в использовании кристалла кварца, который за счет пьезоэлектрического эффекта может работать как резонансный контур и создавать электромагнитные колебания; частота таких колебаний определяется геометрическими размерами и упругими свойствами кристалла. Не представляет никакого труда вырезать и обработать кристалл так, чтобы частота оставалась постоянной с точностью до 10^{-5}. Стабилизируя температуру кристалла, можно добиться еще большей стабильности частоты. Так, несущая частота 200 кГц одной из станций Британской радиовещательной корпорации поддерживается постоянной с точностью $5 \cdot 10^{-10}$. Поэтому, вместо того чтобы использовать собственный кристалл кварца и заботиться о поддержании постоянной температуры, можно получить тот же результат, подавая сигнал этой станции на генератор, который тем самым будет в той же мере стабилизирован по частоте.

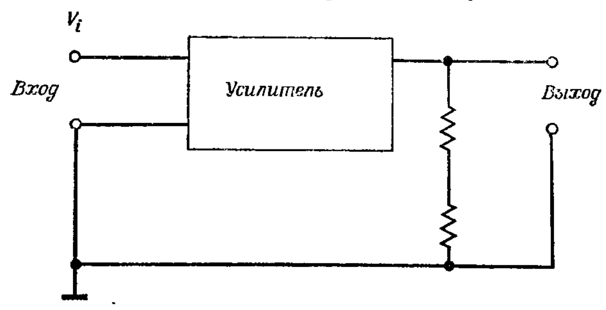
Имеются и еще более стабильные эталоны частоты. Использование атомных переходов цезия позволяет контролировать частоту колебательных систем с точностью до нескольких единиц 10^{-12}. Устройство обладает такой стабильностью, что ныне секунда определена через частоту одного из атомных переходов цезия.

§ 7. Усилитель с отрицательной обратной связью

а. Принцип отрицательной обратной связи. Допустим, что у нас имеется электронный усилитель, который при подаче на его входные клеммы напряжения V_i дает на выходных клеммах напряжение V_0, причем

$$V_0 = \alpha V_i. \qquad (1.7)$$

Мы будем считать величину α постоянной и назовем ее коэффициентом собственного усиления усилителя. Мы



Фиг. 21. Схематическое изображение усилителя.

не будем касаться вопроса о том, как устроен усилитель, а просто будем изображать его в виде ящика с входными и выходными клеммами (фиг. 21).

Теперь предположим, что нам требуется усилить напряжение сигнала V_s, но вместо того, чтобы подать V_s непосредственно на входные клеммы, мы вычтем из него часть βV_0 выходного напряжения, а остальную часть подадим на вход. Подобное уменьшение входного сигнала на величину, зависящую от выходного сигнала, называется *отрицательной обратной связью*. На фиг. 22 представлена схема, в которой сигнал обратной связи снимается с простого делителя напряжения, составленного из резисторов.

При этом

$$V_i = V_s - \beta V_0. \qquad (1.8)$$

Таким образом,

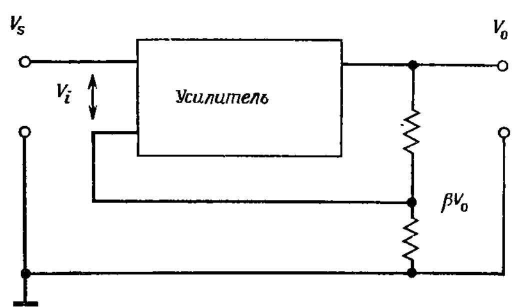
$$V_0 = \alpha V_i = \alpha (V_s - \beta V_0), \qquad (1.9)$$

откуда следует

$$\frac{V_0}{V_s} = \frac{\alpha}{1+\alpha\beta}. \tag{1.10}$$

Итак, полный коэффициент усиления уменьшается за счет обратной связи, так как обе величины — α и β — положительны.

Что из этого следует? Ответ можно дать, рассмотрев предельный случай, когда $\alpha\beta \gg 1$. Пренебрегая единицей в знаменателе выражения (1.10), находим, что коэффициент усиления равен $1/\beta$. Другими словами, полный



Фиг. 22. Усилитель с отрицательной обратной связью.

коэффициент усиления не зависит от коэффициента собственного усиления усилителя, а зависит только от доли выходного сигнала β, которая подается снова на вход.

б. *Преимущества метода*

1. Нечувствительность к изменениям напряжения питания и номиналов деталей усилителя. Величину β можно задать очень точно. Для этого нужна только пара точных резисторов. Величина же α может меняться по многим причинам, например из-за колебаний напряжения питания. К тому же она может меняться от одного экземпляра усилителя к другому из-за различия в параметрах деталей — резисторов, конденсаторов, транзисторов (или ламп). Тем не менее при условии постоянства величины β у всех экземпляров усилителей их полные коэффициенты усиления всегда будут практически одинаковыми. То, что отрицательная обратная связь уменьшает коэффициент

усиления, не следует считать большим недостатком, ибо получить требуемое усиление чрезвычайно легко.

Не прибегая к помощи соотношения (1.10), нетрудно качественно объяснить, почему отрицательная обратная связь ослабляет зависимость полного коэффициента усиления от коэффициента собственного усиления усилителя. Пусть усилитель с обратной связью работает при некоторых значениях α, β и V_s. Тогда величины V_0 и V_i определяются равенствами (1.10) и (1.8).

Теперь предположим, что по какой-то причине снизился коэффициент усиления α. Это приводит к уменьшению V_0, что снижает напряжение обратной связи βV_0, а это в свою очередь повышает V_i. Значит, выходной сигнал V_0 не снизится в такой степени, как этого следовало бы ожидать. Он, конечно, должен несколько уменьшиться, но очень немного. В противном случае последовательность событий, которую мы только что проследили, вообще не имела бы места.

Обратимся к цифрам, чтобы продемонстрировать, насколько отрицательная обратная связь снижает чувствительность полного коэффициента усиления к изменениям α. Если

$$\alpha = 20\,000 \text{ и } \beta = \frac{1}{100}, \tag{1.11}$$

то полный коэффициент усиления равен

$$\frac{20\,000}{1+200} = 99{,}50. \tag{1.12}$$

Допустим теперь, что величина α упала до 10 000, т. е. очень сильно. Полный коэффициент усиления станет равным

$$\frac{10\,000}{1+100} = 99{,}01. \tag{1.13}$$

Итак, хотя собственное усиление упало вдвое, полный коэффициент усиления изменился лишь на 0,5%.

II. Улучшенная частотная характеристика. Пусть на вход подано синусоидальное напряжение. Из-за наличия в схеме емкостей коэффициент собственного усиления большинства усилителей зависит от частоты. Преимуществом омического делителя в цепи обратной связи являет-

ся независимость β от частоты. Таким образом, полный коэффициент усиления практически не зависит от частоты.

Поэтому в высококачественных усилителях низкой частоты предусматривают сильную отрицательную обратную связь, чтобы музыкальные тона всех частот и их гармоники усиливались одинаково. Это необходимо для верного воспроизведения звука, и потому-то в паспорте усилителя обычно говорится, что полный коэффициент усиления постоянен в определенной полосе частот.

III. Улучшенная линейность. Если для сигнала определенной частоты величина V_0 является нелинейной функцией V_i, то по-прежнему

$$V_0 = \alpha V_i, \tag{1.14}$$

но теперь α зависит от V_i. Тем не менее если $\alpha\beta \gg 1$, то при любых V_i можно повторить сказанное выше и

$$V_0 \approx \frac{V_s}{\beta}. \tag{1.15}$$

Итак, если величина β постоянна и $\alpha\beta \gg 1$, то величина V_0 приблизительно линейно зависит от V_s, и это справедливо безотносительно к тому, в какой мере нелинейна связь между V_0 и V_i.

Укажем также еще одно преимущество усилителей с отрицательной обратной связью: повышенное входное и пониженное выходное сопротивление.

в. Стабильность. Если изменить знак сигнала обратной связи, то он будет не вычитаться из V_s, а складываться с ним, т. е. мы получим *положительную* обратную связь. Теперь в равенстве (1.10) величина β отрицательна и возможен случай $\alpha\beta = -1$, когда величина V_0 оказывается бесконечно большой. На практике же напряжение V_0 сильно возрастает, емкостные и индуктивные элементы схемы вызывают задержки процессов во времени, система становится нестабильной, и в ней возбуждаются колебания. На таком принципе специально конструируют генераторы.

Но если требуется, чтобы схема работала в качестве усилителя, то такие колебания в высшей степени нежелательны. Для любой схемы с обратной связью существует опасность, что, даже желая обеспечить отрицательную

обратную связь, на самом деле на некоторых частотах мы получим положительную обратную связь. Это происходит из-за того, что усилитель создает у сигналов зависящие от частоты фазовые сдвиги. Искусство конструирования усилителя состоит в умении обеспечить его стабильность на всех частотах. Теоретические основы этой проблемы были разработаны Найквистом и другими.

Для более полного ознакомления с вопросами теории и расчета усилителей с обратной связью мы отсылаем читателя к специальной литературе [1]). В этом разделе мы лишь ввели вас в круг важных вопросов, имеющих большое значение для разработки любых усилительных устройств.

§ 8. Системы автоматического регулирования

а. Принцип автоматического регулирования. Допустим, что у нас имеется устройство S, некий параметр которого мы хотим регулировать при помощи блока C. Для этого можно снимать управляющий сигнал с выхода блока C и подавать его через усилитель A на вход устройства S.

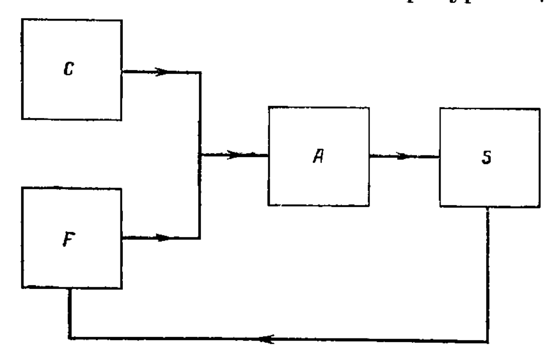
Пусть далее устройство S, воздействуя на блок F, создает сигнал, который характеризует интересующую нас величину. Этот сигнал вычитается из контрольного сигнала, и разность сигналов вновь поступает на вход усилителя, как показано на фиг. 23. Такая система регулирования параметров аппаратуры называется системой автоматического регулирования. Мы видим, что здесь в основу положена идея отрицательной обратной связи; значит, многими ее достоинствами, рассмотренными нами в предыдущем параграфе, наравне с усилителями могут обладать и автоматические регуляторы.

б. Пример—автоматическое регулирование температуры. Как пример системы автоматического регулирования рассмотрим ванну, температуру T кото-

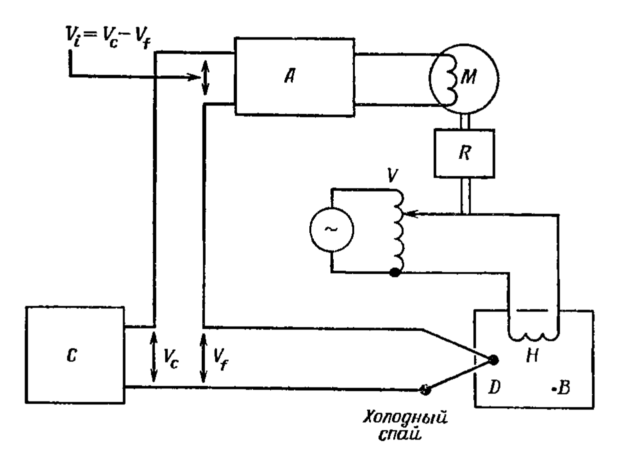
---

[1]) См., например, *А. М. Бонч-Бруевич*, Радиоэлектроника в экспериментальной физике, М., 1966; *К. Э. Эрглис, И. П. Степаненко*, Электронные усилители, М., 1966; *И. П. Степаненко*, Основы теории транзисторов и транзисторных схем, М., 1963.— *Прим. ред.*

рой требуется поддерживать постоянной на заданном уровне. Ванна B (фиг. 24) теряет тепло, отдавая его в окружающее пространство, а ее температура поддержи-



Фиг. 23. Блок-схема системы автоматического регулирования.



Фиг. 24. Система автоматического регулирования для поддержания постоянной температуры ванны.

вается с помощью нагревательной спирали H. Ток в нагревательную спираль H подается через вариак V — автотрансформатор, напряжение на выходе которого, как

и в потенциометрах, зависит от положения подвижного контакта. Таким образом, ток в нагревателе определяется положением контакта, который можно перемещать при помощи электродвигателя постоянного тока M с редуктором R. Скорость вращения двигателя зависит от силы тока в его обмотках; она равна нулю при нулевом токе и изменяет направление при изменении направления тока.

Пусть блок C вырабатывает контрольный сигнал V_c. Обратную связь обеспечивает некоторое устройство, вырабатывающее сигнал, который зависит от температуры ванны. Таким устройством может быть, например, термопара D. Пусть она создает напряжение V_f. На вход усилителя A поступает напряжение $V_c - V_f$, а выход усилителя соединен с обмотками электродвигателя. Условия подобраны таким образом, чтобы при положительном значении разности $V_c - V_f$ электродвигатель перемещал контакт вариака в сторону увеличения тока, поступающего в нагревательный элемент H.

Система поддерживает такую температуру T, при которой напряжение на концах термопары V_f равно V_c. Когда температура ванны достигает этого значения, сигнал на входе усилителя обращается в нуль; электродвигатель останавливается, фиксируя определенное положение контакта вариака. Количество тепла, которое подводится к ванне в таких условиях, в точности равно тепловым потерям при температуре T. Если по какой-либо причине температура упадет, например из-за увеличения тепловых потерь, обусловленного понижением температуры окружающей среды, то напряжение V_f уменьшится и на входе усилителя появится положительный сигнал $V_c - V_f$, который, воздействуя через усилитель на электродвигатель и вариак, увеличит напряжение, питающее нагреватель. Наоборот, когда температура ванны превысит T, сигнал $V_c - V_f$ станет отрицательным, и это приведет к уменьшению напряжения, питающего нагреватель.

Таким образом, мы здесь видим все основные особенности системы автоматического регулирования. Прежде всего необходимо иметь контрольный сигнал V_c, играющий роль эталона. Кроме того, необходимо обеспечить сигнал V_f, который служил бы мерой регулируемой

физической величины. Разность этих двух сигналов управляет устройством, которое действует так, чтобы свести эту разность к нулю.

На примере с ванной постоянной температуры проиллюстрированы некоторые особенности системы с отрицательной обратной связью, о которых говорилось в предыдущем параграфе. Так, функциональная связь между V_c и T почти такая же, как и между V_f и T. И она почти совсем не зависит от прочих связей в системе, таких, как связь между сигналом на входе усилителя и скоростью вращения электродвигателя или между положением контакта вариака и мощностью, подводимой к ванне.

в. Стабильность. До сих пор мы не принимали во внимание запаздывание во времени, которое возможно в рассмотренной нами системе. Но такое запаздывание оказывает важное влияние на ее работу. Допустим, что в нашем примере мы переходим к новому режиму, соответствующему большей температуре T'. Пока ванна разогревается, T все еще меньше, чем T', и с вариака в нагреватель поступает все больший и больший ток. Так будет продолжаться до тех пор, пока температура термопары не достигнет значения T'. Но в силу тепловой инерции системы приток тепла будет превышать равновесные тепловые потери, соответствующие температуре T'. Таким образом, температура ванны превысит требуемую. Точно так же, когда автоматический регулятор уменьшает ток нагревателя, в силу тепловой инерции происходит чрезмерное уменьшение.

Подобный колебательный характер работы автоматического регулятора носит название «рыскания». Он аналогичен той нестабильности, о которой мы говорили в случае положительной обратной связи в усилителях. То и другое математически эквивалентно. Нестабильность в регуляторе устраняется путем демпфирования, т. е. ослабления изменений воздействующей величины — в данном случае тепла, подводимого к ванне,— различными способами. Точно так же, как в случае усилителей с обратной связью, устранение нестабильности является одной из главных проблем разработки и конструирования систем автоматического регулирования.

§ 9. Естественные пределы точности измерений

Можно было бы думать, что, пользуясь достаточно чувствительными приборами и соблюдая необходимую аккуратность, мы можем проводить измерения с любой точностью. Однако это не так. Помимо ограничений, налагаемых квантовомеханическим принципом неопределенности, которого мы здесь не касаемся, существует ряд явлений, приводящих к случайным флуктуациям измерительных устройств. Такие флуктуации, называемые *шумами*, и создают естественные пределы достижимой точности.

а. Броуновское движение. Одна из причин случайных флуктуаций в измерительных приборах — броуновское движение. Рассмотрим для примера маленькое зеркальце, подвешенное на тонкой нити. Если при повороте зеркальца на угол θ возникает возвращающий момент $c\theta$, то система приобретает потенциальную энергию

$$V = \frac{1}{2} c\theta^2. \tag{1.16}$$

Зеркальце постоянно бомбардируют молекулы газа, и несмотря на то, что усредненная во времени результирующая сила равна нулю, ее мгновенное значение отлично от нуля и, следовательно, положение зеркальца может испытывать случайные флуктуации относительно среднего.

Зеркальце находится в тепловом равновесии с молекулами газа. Согласно теореме о равномерном распределении энергии, среднее значение энергии V равно $^1/_2 kT$, где k — постоянная Больцмана, а T — абсолютная температура [1]). Тогда среднее значение величины θ^2 оказывается равным

$$\overline{\theta^2} = \frac{kT}{c}. \tag{1.17}$$

Поскольку $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж$\cdot$град$^{-1}$, при комнатной температуре эффект обычно очень мал. Правда, при очень малых значениях c флуктуации могут стать вполне ощути-

[1]) Теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы рассматривается почти во всех руководствах по статистической физике; см., например, [22]. (См. также *В. Г. Левич*, Введение в статистическую физику, М., 1954.— *Прим. ред.*)

мыми. (Каплер [20] воспользовался этим обстоятельством для измерения константы k.)

Укажем, что рассмотренный эффект нельзя уменьшить понижением давления, так как при этом, хотя и уменьшается число молекул, соударяющихся с зеркальцем в 1 с, и меняется характер движения (вместо мелкой дрожи возникают синусоидальные колебания), величина $\overline{\theta^2}$ остается той же самой. Некоторые характеристики такого движения приведены в книге [15].

б. Шумы сопротивления. Второй весьма важный тип теплового возбуждения — *шумы сопротивления*, или тепловые *шумы Джонсона*. Оказывается, что всякий резистор при температуре T представляет собой источник случайных э. д. с. Их возникновение можно объяснить тепловым движением электронов проводимости. Такая э. д. с. E беспорядочно изменяется, и, как показывает фурье-анализ, среднее значение величины E^2 в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$ дается формулой [1])

$$\overline{E^2} = 4RkT\,d\nu. \tag{1.18}$$

Заметим, что в это выражение не входит частота ν. Иначе говоря, тепловые шумы равномерно распределены по всему спектру частот. Формула (1.18) показывает, что величина $\overline{E^2}$ пропорциональна абсолютной температуре. Поэтому, когда требуется усиливать очень слабые сигналы, чтобы снизить шумы, усилитель иногда охлаждают до температуры жидкого воздуха или даже жидкого гелия.

в. Шумы, обусловленные дискретностью вещества. В электронных лампах ток переносится отдельными электронами. Число электронов, достигающих анода, флуктуирует, что проявляется в виде малых флуктуаций силы тока. Это явление носит название *дробового эффекта*. В тетродах и более сложных лампах мы имеем дело с флуктуациями распределения потоков электронов на анод и на разные сетки. Такие дополнительные флуктуа-

[1]) Мы приводим эту формулу без вывода. Для подробного изучения теории флуктуаций и шумов рекомендуем книгу [2]. (См. также *В. Б. Давенпорт*, *В. Л. Рут*, Введение в теорию случайных процессов и шумов.— *Прим. ред.*) Хорошее введение в фурье-анализ можно найти в книге [37].

ции приводят к появлению так называемых *шумов распределения*.

г. Шумы и помехи. Если не считать работ, связанных с измерением сверхслабых сигналов, то указанные выше различные виды шумов при обычных лабораторных измерениях, как правило, не накладывают ограничений на их точность. Но возможны другие помехи, которые могут оказаться более существенными. К ним относятся сетевые наводки, помехи, создаваемые расположенными по соседству электрическими машинами и станками, паразитные сигналы, возникающие из-за плохих электрических контактов, а также поврежденных ламп и транзисторов.

Упражнения

1.1. Стробоскоп представляет собой устройство для измерения частоты вращения ν какого-либо предмета. Предмет освещают световыми вспышками, повторяющимися с известной частотой ν_0, и измеряют кажущуюся частоту его вращения $\nu_{\text{каж}}$.

а) Покажите, что при $\nu = m\nu_0$, где m — целое число,

$$\nu_{\text{каж}} = \nu - m\nu_0.$$

Каков смысл отрицательного значения $\nu_{\text{каж}}$?

б) Вычислите частоту ν и соответствующую среднеквадратичную ошибку при

$$m = 5,$$

$$\nu_0 = 100{,}00 \pm 0{,}01 \text{ Гц},$$

$$\nu_{\text{каж}} = 0{,}40 \pm 0{,}05 \text{ Гц}.$$

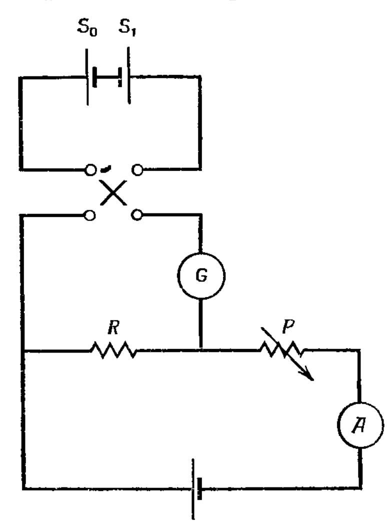
1.2. Э. д. с. E элемента Вестона при 20° С равна 1,0187 В. Ее температурная зависимость дается выражением

$$\frac{dE}{dT} = -37 \text{ мкВ} \cdot (°\text{C})^{-1}.$$

Требуется измерить ΔE, разность значений э. д. с. батареи S, соответствующих температуре 20 и 30° С. Разберем два метода:

а) Пользуясь очень точным потенциометром, измеряются величины E при двух значениях температуры: 20 и 30° С. Точность каждого измерения 10 мкВ.

б) Измеряют разность э. д. с. батареи S_1 и другой такой же эталонной батареи S_0 по схеме, представленной на фиг. 25. Батареи соединены навстречу друг другу. Сопротивление эталонного резистора R равно 0,001 Ом, его точность равна 10^{-3}. Сопротивление резистора P подбирают так, чтобы стрелка гальванометра G была на нуле. Затем с точностью 1% измеряют ток через миллиамперметр A. Измерения проводят при двух значениях температуры батареи S_1 (20 и 30° С) и при неизменной температуре батареи S_0, равной 20° С.



Фиг. 25. Схема измерения разности э. д. с. двух нормальных элементов.

Сравните точность обоих методов измерения величины ΔE. (Предельную чувствительность гальванометра по напряжению примите равной 0,2 мкВ.)

1.3. Сравните в отношении пределов измерения, точности, удобства в работе (с учетом различных случаев их применений) и стоимости следующие типы термометров:

а) обычный ртутный термометр;
б) термопару;
в) платиновое сопротивление;
г) термосопротивление (термистор);
д) газовый термометр постоянного объема;
е) оптический пирометр.

1.4. Перечислите возможные способы измерения магнитного поля и сравните их между собой по тем же показателям, что и в предыдущей задаче.

В следующих упражнениях предлагается проанализировать ряд проблем, что наверняка заставит вас задуматься над вопросом о сущности измерений и поможет увидеть тесную связь между теорией и экспериментом. Некоторые из проблем выходят за рамки курса физики на первом году обучения.

1.5. Проанализируйте понятие размера в приложении
а) к атому,
б) к атомному ядру.

1.6. Проанализируйте возможные методы измерения расстояния между
а) атомами в кристалле;
б) двумя атомами в молекуле водорода;
в) двумя точками на поверхности Земли, находящимися на расстоянии 10 км одна от другой;
г) Землей и Луной;
д) Землей и ближайшей звездой;
е) Землей и далекой звездой.

1.7. Проанализируйте возможные методы измерения массы
а) мешка картофеля,
б) золотого бруска,
в) протона,
г) нейтрона,
д) Земли.

1.8. Объясните, каков смысл следующих утверждений и как их можно проверить:
а) температура соли после адиабатического размагничивания равна 0,001 K;
б) температура плазмы равна 50 000 K;
в) температура космического пространства равна 3 K;
г) температура некоторой системы ядерных спинов отрицательна.

ГЛАВА 2

АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Цель этой главы такая же, как и предыдущей,— изложение точных и надежных методов измерения. Но в данной главе различные методы рассматриваются в связи с тем или иным законченным экспериментом.

Таких экспериментов выбрано три. Все они хорошо описаны в общих руководствах или оригинальных статьях, к которым мы отсылаем читателя для более подробного ознакомления. Здесь же мы анализируем каждый из экспериментов, делая упор в основном на способы снижения или исключения различных ошибок.

§ 1. Сравнение малых сопротивлений при помощи потенциометра

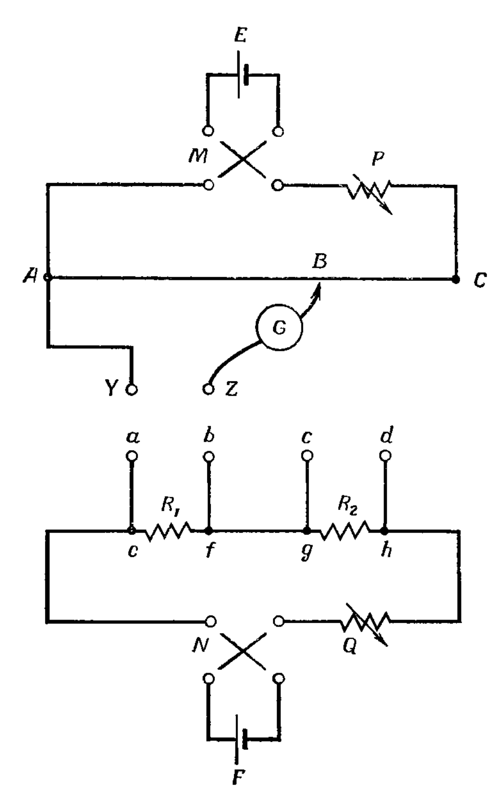
а. Сущность метода. На фиг. 26 представлена упрощенная схема потенциометра. Аккумулятор E создает разность потенциалов на концах реохорда AC. Два сравниваемых резистора R_1 и R_2 соединены последовательно с аккумулятором F. Поскольку ток через них один и тот же, разности потенциалов V_1 и V_2 на их концах удовлетворяют соотношению

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{R_1}{R_2}. \tag{2.1}$$

Точку Y соединяют с точкой a, а точку Z — с точкой b и подвижный контакт B перемещают до тех пор, пока ток через гальванометр не станет равным нулю. Тогда по шкале реохорда отсчитывают величину AB, равную x_1. Затем точки Y и Z соединяют с точками c и d, измерение повторяют и получают другое значение величины AB, равное x_2. Найденные значения x_1 и x_2 пропорциональны разности потенциалов на концах соответствующего резистора. Поэтому

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{V_1}{V_2}=\frac{x_1}{x_2}. \tag{2.2}$$

Переменные резисторы P и Q позволяют добиться, чтобы точка баланса при измерениях с обоими резисторами лежала в пределах шкалы реохорда и в случае резистора с бóльшим сопротивлением была ближе к точке C.



Фиг. 26. Схема потенциометра для сравнения малых сопротивлений.

б. Источники ошибок. Перечислим главные источники ошибок измерения величины R_1/R_2 изложенным выше методом.

I. Может оказаться неверно размеченной шкала реохорда.

II. Ток через реохорд может быть не совсем одинаковым в обоих измерениях, и тогда нарушается равенство

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{x_1}{x_2}.$$

III. Точно так же может оказаться неодинаковым ток через резисторы R_1 и R_2, в связи с чем нарушается равенство

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{V_1}{V_2}.$$

IV. Нулевое деление шкалы реохорда может не соответствовать нулевой разности потенциалов.

V. Реохорд AC может быть неоднородным по своей длине, и тогда также нарушается соотношение

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{x_1}{x_2}.$$

VI. Значения R_1 и R_2 могут оказаться невоспроизводимыми, если они хотя бы слабо зависят от способа присоединения проводов в точках e, f, g и h.

VII. Может быть неодинаковой температура каждого из резисторов R_1 и R_2.

VIII. Кроме E и F, в каждой из цепей схемы могут существовать иные источники э. д. с.

в. Устранение ошибок. Рассмотрим по порядку все перечисленные эффекты и выясним способы устранения или уменьшения тех ошибок, к которым каждый из них может привести.

I. В приборах подобного типа в качестве шкалы реохорда следует брать точную стальную линейку. Тогда ошибка наверняка будет пренебрежимо мала — во всяком случае, ее можно сделать такой, если сверить линейку с эталоном.

II и III. Ток через AB и через R_1 и R_2 зависит от э. д. с. аккумуляторов E и F. Последние будут весьма стабильными, если

а) аккумуляторы хорошо заряжены,

б) обе цепи все время остаются замкнутыми для обеспечения постоянного режима разрядки аккумуляторов,

в) измерения x_1 и x_2 производятся с минимальным перерывом.

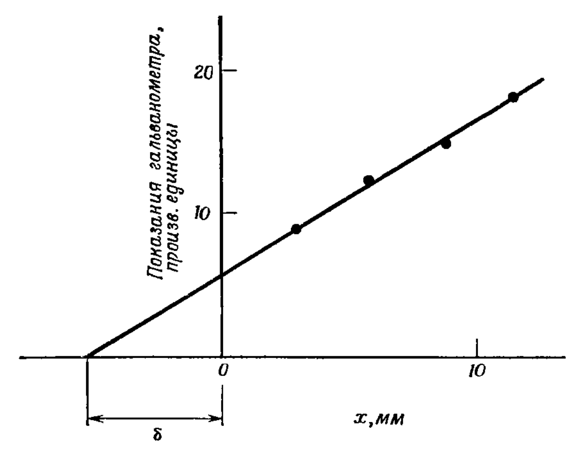
То, что э. д. с. на самом деле не совсем постоянны во времени, означает отсутствие строго стабильного режима. При таких обстоятельствах хорошо проводить измерения двух величин по методу «сандвича». Это значит, что сначала измеряют величину x_1, потом x_2, а затем снова x_1. Из двух значений x_1 берется среднее. Можно пойти дальше и еще несколько раз измерять поочередно то x_1, то x_2. При этом необходимо заканчивать измерением той же величины x_1 или x_2, с которой начали, и, кроме того, проводить измерения часто и примерно с одинаковыми интервалами времени. В таком случае ошибка за счет *постепенного* изменения э. д. с. E и F будет действительно очень малой.

IV. Добиться, чтобы нулевому делению шкалы точно соответствовала нулевая разность потенциалов в точках A и B, довольно трудно. Поэтому всегда возможна ошибка установки нуля — постоянная величина δ, которую следует прибавлять к показаниям реохорда, чтобы получить правильное значение. Лучший способ найти величину δ — отключить аккумулятор F, так чтобы потенциометр измерял нулевую разность потенциалов. При этом точка баланса будет лежать чуть-чуть дальше крайнего положения движка на реохорде. Построив график зависимости показаний гальванометра от x при нескольких различных положениях движка вблизи края реохорда, путем экстраполяции к нулевому отклонению можно найти величину $x = -\delta$ (фиг. 27).

V. Если с реохордом осторожно обращаются и на нем нет вмятин, то ошибка за счет его неоднородности скорее всего довольно мала. При желании это можно проверить, но не путем измерения диаметра в разных его точках. Вообще всегда следует измерять ту величину, которая непосредственно требуется в каждом конкретном случае; здесь это разность потенциалов как функция длины реохорда. Поэтому лучший способ проверить, однороден ли реохорд,— измерять разность потенциалов между двумя подвижными контактами, перемещающимися вдоль AC на фиксированном расстоянии друг от друга.

VI. Теперь перейдем к вопросу о воспроизводимости сопротивления резисторов R_1 и R_2. Одно из преимуществ потенциометрического метода сравнения сопротивлений состоит в том, что сопротивление «потенциальных» про-

водов ae, bf и т. д. несущественно, поскольку в точке баланса ток в них равен нулю и, следовательно, равно нулю падение напряжения на них. Но если сопротивление резисторов R_1 и R_2 мало (10^{-3} — 10^{-4} Ом), приходится обращать внимание на то, каким образом присоединяются токовые и потенциальные провода. Это объясняется



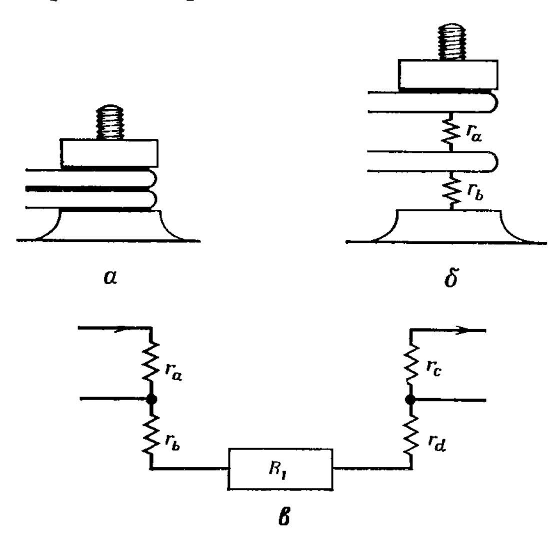
Фиг. 27. Определение ошибки в положении нуля потенциометра.

тем, что места соединения проводов всегда вносят небольшое сопротивление — так называемое сопротивление контактов порядка 10^{-6} Ом. Такое сопротивление может сильно изменяться, и поэтому крайне важно исключить его из измеряемых величин.

Допустим, что у резистора только две клеммы, к каждой из которых присоединены два провода — токовый и потенциальный. На фиг. 28, *а* схематически изображена винтовая клемма с двумя зажатыми в ней проводами (которые снабжены расплющенными наконечниками). Эквивалентная схема такого соединения представлена на фиг. 28, *б*, где r_a и r_b — сопротивления контактов. Если в каждой клемме верхний провод токовый, то эквивалентная схема имеет такой вид, как на фиг. 28, *в*. При измерениях к сопротивлению резистора R_1 добавляются сопротивления контактов r_b и r_d. То же самое можно ска

зать и в том случае, если верхние провода потенциальные.

Трудности устраняются, если у резистора имеется четыре клеммы, как на фиг. 29. Токовые вводы присоединяют к клеммам A и B, а потенциальные — к клеммам C и D. В таком варианте наличие сопротивлений контакта ничему не вредит. Сопротивление контактов A и B незна-



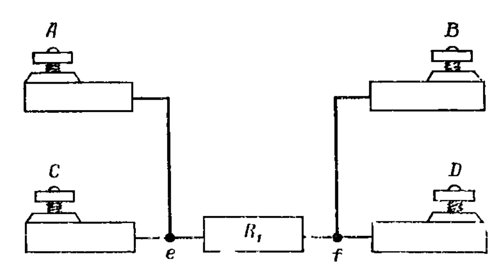
Фиг. 28. Резистор с двумя клеммами (влияние сопротивлений контакта).

чительно снижает ток, но теперь нам нужно только, чтобы это сопротивление не менялось по величине. Сопротивление контактов C и D вообще не вносит ошибки, ибо ток в точке баланса отсутствует. Следовательно, в этом случае мы фактически получаем сопротивление между точками e и f. Проводники припаяны в этих точках раз и навсегда, что обеспечивает постоянство измеряемого сопротивления. Заметим, что если присоединять токовые и потенциальные провода только к двум из четырех клемм, указанное преимущество теряется и мы вновь возвращаемся к варианту, представленному на фиг. 28, *в*.

VII. Удельное сопротивление большинства материалов меняется с температурой. Так, при комнатной тем-

пературе удельное сопротивление многих металлов, в том числе и меди, возрастает примерно на 0,4% при повышении температуры на 1° С. Для точных исследований этот эффект существен, но имеется ряд сплавов, удельное сопротивление которых при комнатной температуре изменяется менее чем на 10^{-5} на каждый градус Цельсия. Из них два наиболее широко распространенных — манганин (сплав меди, магния и никеля) и константан (сплав меди и никеля).

Очевидно, что, когда сравниваются два резистора из одного и того же материала, необходимо обеспечить, что-



Фиг. 29. Резистор с четырьмя клеммами.

бы их температура была одинаковой. Если же резисторы из разных материалов, то следует измерять эту температуру.

VIII. Все места соединения разных материалов в электрической цепи могут оказаться источниками э. д. с. за счет термоэлектрического эффекта. Чаще всего такие э. д. с. возникают в местах соединения медных проводников с латунными клеммами. Если взглянуть на основную схему (фиг. 26), то нетрудно сообразить, что любой источник дополнительной з. д. с., включенный последовательно с E и F, не оказывает влияния на результат, поскольку, как уже отмечалось, нам не важно, каковы истинные токи в цепях, а важно лишь, чтобы они были постоянными при измерении величин x.

Наличие же постороннего источника з. д. с. в цепи гальванометра $AYaefbZBA$ приведет к ошибке при измерении, скажем, величины x_1. Ее можно исключить, измеряя x_1 дважды: сначала при одном направлении токов

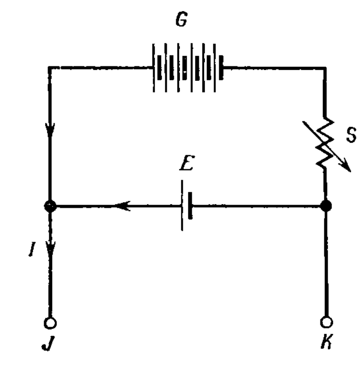
в двух цепях схемы, а затем — при обратном, что достигается с помощью ключей M и N. Направление термо-э. д. с. при этом остается неизменным. Следовательно, среднее из двух значений x_1 даст нам ту величину, которую мы получили бы, если бы у нас не было дополнительных источников э. д. с. в цепи гальванометра. Точно так же дважды измеряется и величина x_2.

г. Замечания. 1) Главное достоинство метода в том, что он позволяет измерять непосредственно сопротивление резисторов R_1 и R_2, не учитывая сопротивления подводящих проводов. Поэтому данный метод оказывается особенно ценным при измерении малых сопротивлений (порядка 10^{-1} — 10^{-4} Ом), а также в тех случаях, когда затруднен доступ к резисторам, как это часто бывает в экспериментах при очень высоких или очень низких температурах. Главный недостаток метода — необходимость поддерживать неизменными токи в двух цепях. Это требует быстрого проведения измерений или многократного их повторения. 2) Точность рассмотренного нами метода определяется точностью перемещения контакта вдоль реохорда, длина которого обычно составляет 500 мм. Установить точку баланса и произвести соответствующий отчет можно с точностью примерно 0,1 мм. Таким образом, общая точность измерения в лучшем случае составляет примерно $2 \cdot 10^{-4}$. Чтобы повысить точность, необходимо заменить реохорд набором катушек, как это делается в промышленных потенциометрах. Тогда можно проводить измерения с точностью до нескольких единиц на 10^{-5}.

Чтобы обеспечить столь высокую точность, необходимо принять ряд дополнительных мер. Прежде всего резистор должен быть изготовлен из материала типа манганина и находиться в стандартных условиях в отношении деформации, температуры и влажности. Кроме того, следует существенно уменьшить изменения со временем э. д. с. батарей E и F при помощи какого-либо стабилизирующего устройства. Простая схема стабилизации э. д. с. представлена на фиг. 30. Э. д. с. батареи G равна 12 В, а э. д. с. батареи E составляет 2 В. Сопротивление резистора S подбирается так, чтобы, например, лишь 5% тока I через потенциометр обеспечивалось батареей E, а на 95% —

батареей G. Напряжение между точками J и K почти полностью определяется падением напряжения на батарее E, но так как она отдает очень малый ток, это падение напряжения меняется крайне медленно.

д. Нулевые методы. Одной из причин, побудивших нас рассмотреть потенциометрический метод измерения, было то, что он может служить хорошим примером нулевого метода. *Нулевым* называется метод, при котором измеряемая величина X компенсируется аналогичной величиной Y, которую изменяют до тех пор, пока тот или иной индикатор нуля не укажет, что достигнута точка баланса. Такой метод следует противопоставить *прямому* методу, при котором отклонение стрелки прибора или его показание дает саму измеряемую величину.



Фиг. 30. Простой способ стабилизации э.д.с. элемента E.

У нулевых методов имеется ряд важных преимуществ перед прямыми. Стабильность и воспроизводимость изменяемой величины Y в нулевом методе обычно выше, чем стабильность измерительного прибора в прямом методе и воспроизводимость его показаний, а значение этой величины обычно можно определить более точно. Прибор в прямом методе требует градуировки, и желательно, чтобы он был линейным. В противоположность этому индикатор в нулевом методе должен лишь указывать, что некоторая величина равна нулю. Поэтому нет необходимости ни в его градуировке, ни в линейности (хотя вблизи нуля и то и другое желательно). Главное же, что требуется от индикаторного устройства,— это высокая чувствительность, т. е. чтобы он обнаруживал минимальные отклонения от баланса.

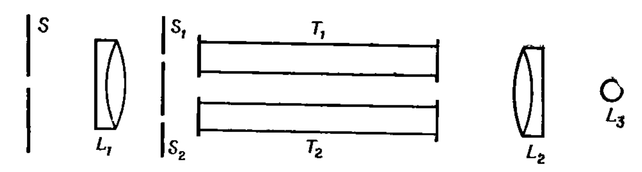
Недостатком нулевых методов следует считать то, что они требуют больше времени, нежели прямые, поскольку к точке баланса мы приближаемся лишь постепенно. Этот недостаток можно устранить ценой некоторого услож-

нения схемы, если предусмотреть устройство для автоматического поиска точки баланса. Следует четко представлять себе, что при нулевом методе мы получаем лишь относительную, а не абсолютную величину. Поэтому при таком методе обязательно нужен точно известный эталон.

§ 2. Рефрактометр Рэлея

а. Устройство прибора. Рефрактометр Рэлея — это прибор, предназначенный для измерения показателя преломления газов и малых изменений показателя преломления твердых тел и жидкостей.

Монохроматический свет, проходящий через вертикальную щель S (фиг. 31), коллимируется ахроматической



Фиг. 31. Рефрактометр Рэлея (вид сверху).

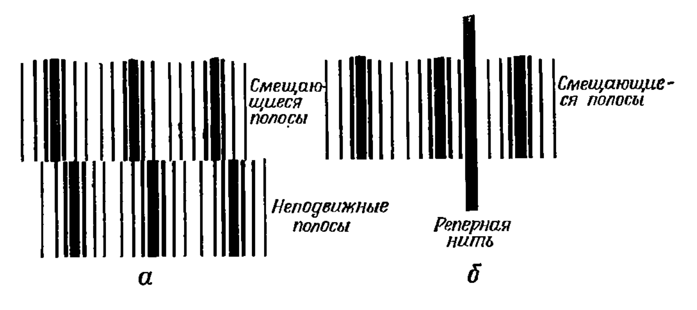
линзой L_1 и падает на вертикальные щели S_1 и S_2. Два световых пучка проходят через трубки T_1 и T_2 равной длины t, расположенные в одной горизонтальной плоскости. Затем эти пучки сходятся, образуя в фокальной плоскости линзы L_2 вертикальные интерференционные полосы. Полосы рассматривают при помощи небольшой цилиндрической линзы L_3.

Чтобы измерить показатель преломления газа, сначала наблюдают полосы, когда в обеих трубках вакуум. Затем одну из трубок, например T_1, наполняют газом, и при этом оптическая длина пути пучка 1 увеличивается. В результате система полос смещается, и подсчитывают число полос, пересекших реперную нить. Если нить пересекли p полос (необязательно целое число), то показатель преломления газа μ можно найти из соотношения

$$t(\mu - 1) = p\lambda, \tag{2.3}$$

где λ — длина волны света. В следующих разделах мы рассмотрим некоторые практические стороны данного прибора; подробные сведения об интерферометре Рэлея можно найти в книге [3] [1]).

б. Система отсчета. Вместо натянутой нити в качестве репера лучше использовать вторую, неподвижную систему полос. Ее можно получить, пропуская через трубки только верхнюю часть пучков, формируемых щелями S_1 и S_2. Нижние же части пучков проходят под



Ф и г. 32. Два способа отсчета.

а — по смещению относительно неподвижной системы полос; *б* — по смещению относительно реперной нити. В случае *а* глаз способен заметить меньшие смещения, нежели в случае *б*.

трубками и образуют другую систему полос, не связанную с первой. Поскольку оптическая длина пути двух нижних пучков одинакова, эта система полос в течение всего опыта остается неподвижной.

Преимущество такой системы отсчета состоит в том, что глаз значительно более чувствителен к относительным смещениям двух одинаковых систем неперекрывающихся параллельных линий — в данном случае двух систем полос,— нежели к относительным смещениям реперной нити и полосы (фиг. 32). В первом случае можно заметить смещение всего лишь на $^1/_{40}$ расстояния между полосами, тогда как во втором случае предел — $^1/_{10}$ расстояния между полосами. Чувствительность глаза в первом случае называется *верньерной остротой зрения*.

[1]) См. также *Г. С. Ландсберг*, «Оптика», М., 1962.— *Прим. ред.*

Еще одно важное преимущество системы отсчета в виде неподвижных полос заключается в том, что деформация несущей фермы прибора или смещение двойной щели S_1S_2 не оказывают влияния на результаты измерения, ибо все это одинаково влияет на обе системы полос.

в. Цилиндрическая окулярная линза. Расстояние между щелями S_1 и S_2 составляет примерно 10 мм. Угловое расстояние между полосами дается соотношением

$$s\theta = \lambda. \tag{2.4}$$

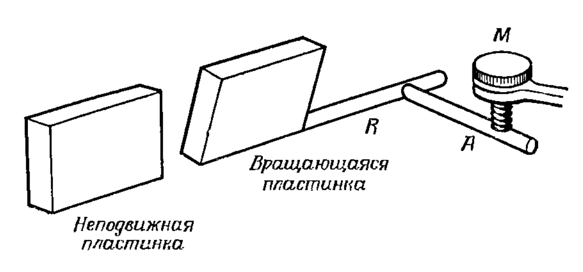
Это значит, что при $\lambda = 500$ нм угол θ равен $5 \cdot 10^{-5}$ рад, или примерно $1/5'$. Таким образом, полосы оказываются очень тесно расположенными. Их рассматривают через линзу L_3, которая представляет собой просто точно изготовленный стеклянный цилиндр диаметром около 2 мм. Выбор вертикальной цилиндрической линзы объясняется тем, что она дает увеличение только в направлении поперек полос. Дело в том, что эффективная апертура пучка значительно меньше зрачка глаза и, следовательно, всякое увеличение изображения связано со снижением его яркости. Если увеличение цилиндрической линзы равно n (обычно это примерно 150), то яркость уменьшается в n раз. Сферическая линза с тем же увеличением снизила бы яркость в n^2 раз. Поскольку же недостаточная яркость — одно из слабых мест данного прибора, имеет прямой смысл взять не сферическую, а цилиндрическую линзу.

г. Компенсационный метод. Подсчитывать большое число полос, которые пересекут реперную нить после напуска газа в трубку, весьма утомительно. Поэтому увеличение оптической длины пути пучка 1 компенсируют увеличением оптической длины пути пучка 2 и измеряют это увеличение. Мы имеем здесь еще один пример нулевого метода. Чтобы фиксировать момент, когда оптические длины одинаковы, в качестве индикатора пользуются двумя системами полос.

Разработано несколько способов компенсации. Мы ограничимся лишь одним из них. В каждый из двух верхних пучков вводят очень тонкую стеклянную пластинку; одна такая пластинка неподвижна, а другую можно поворачивать. Когда пластинки параллельны, раз-

ность хода равна нулю. Эту разность можно регулировать, поворачивая стержень R (фиг. 33), к которому прикреплена подвижная пластинка. Для этого вращают микрометрический винт M, который упирается в радиальное плечо A. Таким способом удается весьма точно и с хорошей воспроизводимостью очень плавно регулировать разность хода.

Можно, конечно, рассчитать зависимость разности хода, создаваемой компенсационным устройством, от положения микрометрического винта, если известны разме-



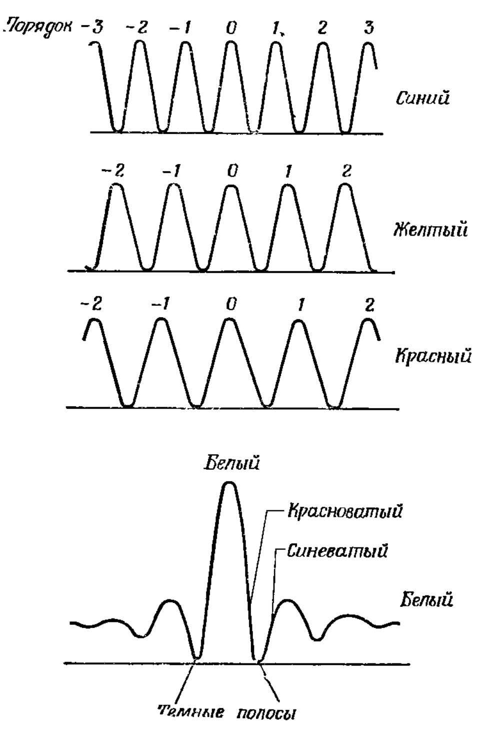
Фиг. 33. Компенсатор.

ры и показатель преломления вращающейся пластинки. Но общее правило таково: фактическая градуировка лучше расчетов. Поэтому компенсатор градуируют, наблюдая систему полос в монохроматическом свете. Поворачивая микрометрический винт, записывают его показания, соответствующие перемещению на одну, две, три и т. д. полосы. Градуировку следует проводить при разных длинах волн падающего света.

д. Интерференционные полосы в белом свете. Все, что говорилось выше, относилось к случаю, когда у нас монохроматический свет. Ясно, что основные измерения и должны проводиться в монохроматическом свете, ибо длина волны — важнейшая величина в выражении (2.3). Но было бы очень неудобно иметь дело только с монохроматическим светом, так как при этом все полосы выглядят одинаково. Нам пришлось бы сидеть и по мере заполнения трубки T_1 газом все время подкручивать винт компенсационного устройства, чтобы вернуть картину в исходное положение. Если же компенсация оказалась бы

не совсем точной и мы в какой-то момент проморгали бы перемещение полос, то уже не смогли бы найти среди них полосу нулевого порядка.

Но всего этого очень легко избежать, если взять источник белого света. Каждая монохроматическая компонен-



Фиг. 34. Полосы синего, желтого, красного и белого света.

Средняя белая полоса соответствует интерференции нулевого порядка.

та источника создает свою систему полос со своим расстоянием между полосами: синяя — самая частая, красная — самая редкая (фиг. 34). Наблюдаем же мы суммарную картину, возникающую при наложении всех этих систем полос. Нулевой разности хода в каждой системе

отвечает светлая полоса, и в сумме получается светлая полоса белого цвета. Но по мере возрастания разности хода светлые полосы разных систем расходятся и уже никогда вновь не совпадают. (Если набор различных длин волн конечен, то совпадение еще возможно, но с бесконечным набором непрерывно меняющихся длин волн это исключено.) В результате полосы, лежащие по обе стороны средней белой полосы, будут окрашены. По мере удаления от нее окраска усиливается и полосы быстро исчезают. Таким образом, источник белого света позволяет нам обнаружить нулевую разность хода.

Измерения проводят в следующем порядке. Сначала в трубках вакуум и включен источник белого света. Поворачивая микрометрический винт, мы добиваемся примерного совпадения обеих систем полос. Затем источник белого света заменяем монохроматическим и производим точную установку винта. В одну из трубок вводим требуемое количество газа. После этого при помощи винта полосу первого порядка возвращаем в среднее положение. На первом этапе полосу, как и раньше, устанавливаем, пользуясь источником белого света, а окончательную установку производим с монохроматическим светом.

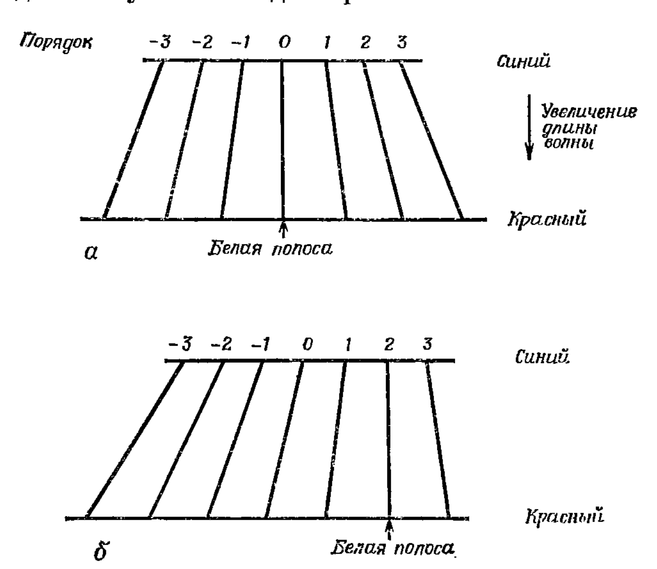
е. ***Влияние дисперсии.*** При работе в белом свете возможны некоторые трудности, если дисперсия в газе будет отличаться от дисперсии в компенсирующей пластинке.

Рассмотрим момент, когда газа в трубке нет и компенсатор установлен на нуль. Систему полос от источника белого света можно представить в виде диаграммы, изображенной на фиг. 35. Если на этой диаграмме провести горизонтальную прямую, то точки ее пересечения с наклонными линиями дадут расстояние между полосами для соответствующей длины волны. Чем ниже проходит такая прямая, тем большей длине волны это соответствует. Так, верхняя горизонтальная прямая дает картину полос в синем свете, а нижняя — в красном.

Суммарный эффект от белого света получим, если сожмем эту диаграмму в вертикальном направлении. При этом полоса нулевого порядка, первоначально вертикальная, сожмется в резко очерченное пятно, соответствующее яркой средней полосе. Полосы же 1-го, 2-го

3-го, . . . порядка сожмутся в линии определенной ширины, которые вскоре начинают перекрываться, что соответствует исчезновению полос.

Теперь допустим, что трубка наполнена газом и поворотом пластинки скомпенсировано увеличение оптической длины пути. Если дисперсия в газе и в пластинке



Фиг. 35. Диаграмма, показывающая, как образуется система полос при использовании белого света.

Горизонтальная прямая дает систему полос для света определенной длины волны. Сжимая диаграмму по вертикали, получаем результат для белого света. *а* — одинаковая дисперсия в газе и компенсирующей пластинке; *б* — разная дисперсия.

одинакова, то компенсации можно добиться для всех длин волн и диаграмма будет выглядеть так, как изображено на фиг. 35, *а*. Но если дисперсия неодинакова, то одновременной компенсации для всех длин волн достичь невозможно. Предположим, что пластинка установлена так, чтобы точная компенсация достигалась при некоторой длине волны в середине спектра. В таком случае диаграмма должна выглядеть так, как изображено на фиг. 35, *б*.

Синяя часть спектра, скажем, оказалась перекомпенсированной, и ее полоса нулевого порядка сдвинулась вправо; тогда красная часть — недокомпенсирована, т. е. ее полоса нулевого порядка сместилась влево. Если теперь сжать эту диаграмму по вертикали, то в резкое пятно превратится полоса номер 2. Иными словами, яркая белая полоса уже не будет соответствовать нулевому порядку. (Вообще говоря, на фиг. 35, *б* не должно быть ни одной вертикальной линии, и, таким образом, порядок белой полосы не будет целым числом.)

Подобный дефект, выражающийся в смещении белой полосы относительно положения нулевого порядка, можно устранить двумя способами. Во-первых, можно наполнять трубку газом постепенно, так, чтобы легко было следить за изменениями, происходящими с белой полосой. Во-вторых, можно взять пластинку с дисперсией, очень близкой к дисперсии исследуемой среды. Но это технической вопрос, который мы не будем здесь разбирать (для подробного ознакомления с данным вопросом см. книгу [3]).

ж. ***Точность метода и его применение.*** Мы уже говорили, что наименьшая разность хода, которую можно зарегистрировать, равна $^1/_{40}\lambda$. Наибольшая же величина, доступная измерению, составляет примерно 250λ. Известно, что

$$t\Delta\mu = p\lambda. \qquad (2.5)$$

Следовательно, при длине трубки 10 мм и $\lambda = 400$ нм можно зарегистрировать изменение величины μ всего лишь на 10^{-6}, а максимальное изменение, которое можно измерить, равно 10^{-2}. При длине трубки 1 м наименьшее и наибольшее регистрируемые изменения величины μ составляют 10^{-8} и 10^{-4}.

Рефрактометр Рэлея — самый точный прибор для измерения малых изменений показателя преломления. Показатель преломления прозрачной смеси жидкостей или газов зависит от соотношения ее компонент, и рефрактометр часто оказывается наиболее точным инструментом для определения состава смеси или малых его изменений. Этот прибор находит сейчас широкое применение в физике, химии, биологии.

При точных измерениях необходимо строго контролировать температуру; так, в случае жидкой среды, чтобы обеспечить точность 10^{-6}, нужно знать температуру с точностью до 0,01° С. Чем длиннее трубка прибора, тем он чувствительнее, но и тем труднее получить надежные результаты. Поэтому выбирают самую короткую трубку, с которой достижима требующаяся в данном конкретном случае точность.

Рефрактометр был создан лордом Рэлеем в 1896 г. для измерения показателей преломления только что открытых тогда инертных газов — гелия и аргона. Величина $\mu - 1$ при нормальных условиях для гелия равна [1]) $3{,}6 \cdot 10^{-5}$, а для аргона — $28{,}1 \cdot 10^{-5}$. Как мы уже видели, прибор позволяет успешно измерять столь малые величины.

§ 3. Измерение магнитного момента свободного электрона

а. Введение. Наш третий (и последний) опыт взят из области современной физики. Это — очень точный эксперимент по измерению магнитного дипольного момента свободного электрона, проведенный Уилкинсоном и Крейном в 1963 г. [45]. Наглядно показывая, что в современной физике хорошие экспериментаторы руководствуются теми же принципами, что и в классической физике, данный эксперимент и сам по себе очень красив.

Возможно, что с некоторыми положениями физики вы встретитесь здесь впервые [2]). В таком случае, если вам трудно будет следить за ходом изложения, при первом чтении можно пропустить всю остальную часть параграфа. Но в данном эксперименте так много поучительного, что вы не пожалеете, если проявите некоторую настойчивость. В разделах «б» и «е» мы рассматриваем физические принципы, на которых базируется эта экспе-

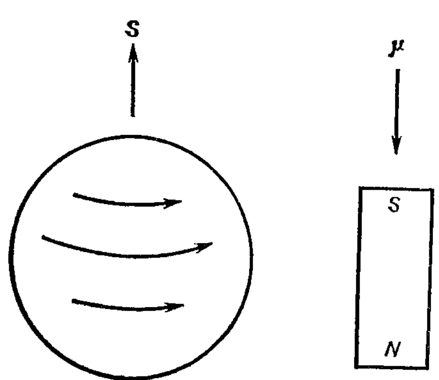
---

[1]) При $\lambda = 589$ нм [21].

[2]) С основными принципами квантовой механики и теории электромагнетизма можно ознакомиться по соответствующим учебникам (см., например, [9, 11]). (См. также учебники *Д. И. Блохинцева* «Основы квантовой механики», М., 1960, и *А. С. Компанейца* «Теоретическая физика», М., 1955.— *Прим. ред.*)

риментальная работа; сам эксперимент описывается в разделе «ж».

б. Основные свойства электрона. Обозначим заряд электрона через $-e$, а его массу покоя через m. Электрон обладает собственным моментом количества движения — спином, который можно считать обусловленным его вращательным движением и представить в виде вектора **S** (фиг. 36). Проекция вектора **S** на любое направление



Фиг. 36. Собственный момент количества движения электрона можно изобразить вектором **S**, а его магнитный дипольный момент — вектором **μ**.

равна $+\hbar/2$ или $-\hbar/2$, где $\hbar$ — постоянная Планка, деленная на 2π. Вращение заряда приводит к появлению магнитного диполя, и магнитный дипольный момент электрона мы обозначим через $\boldsymbol{\mu}$. Таким образом, из-за наличия спина электрон можно рассматривать как крошечный гироскоп, а из-за наличия и спина и заряда — как крошечный магнит (фиг. 36).

Соотношение между $\boldsymbol{\mu}$ и **S** можно написать в виде

$$\boldsymbol{\mu} = -g\frac{e}{2m}\mathbf{S}, \tag{2.6}$$

где g — безразмерная величина, называемая g-фактором. Задача данного эксперимента — измерить величину g. Тогда, зная e, m и $\hbar$, можно вычислить $\boldsymbol{\mu}$, но, как мы

увидим, эксперимент дает величину g с точностью, превышающей в настоящее время точность остальных атомных констант.

Когда в 1925 г. Уленбек и Гаудсмит впервые выдвинули идею спина, они приняли величину g равной 2, чтобы объяснить поведение спектральных линий в магнитном поле. Релятивистская теория электрона, развитая в 1928 г. Дираком, дает то же самое значение. Но после 1948 г. Швингер, Фейнман, Томонага и др. предложили теорию, основанную на квантовании электромагнитного поля, согласно которой

$$g=2\left[1+\frac{\alpha}{2\pi}+O\left(\frac{\alpha^2}{\pi^2}\right)\right], \tag{2.7}$$

где $\alpha = e^2/(4\pi\varepsilon_0 c\hbar)$ — постоянная тонкой структуры. Величина α равна примерно 1/137. Таким образом, прибавка к прежней величине g составляет лишь 1/860, и такова точность измерений, необходимая для проверки данного теоретического вывода.

в. Движение электрона в магнитном поле. Чтобы разобраться в эксперименте, следует рассмотреть, что происходит с электроном в присутствии внешнего магнитного поля. Эффекты, обусловленные зарядом и магнитным дипольным моментом, можно исследовать по отдельности. В первом случае мы найдем траекторию электрона, а во втором — направление его момента количества движения $\mathbf{S}$.

1) *Траектория электрона.* Если электрон обладает скоростью $\mathbf{v}$ и находится в магнитном поле $\mathbf{B}$, то на него действует сила Лоренца

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{2.8}$$

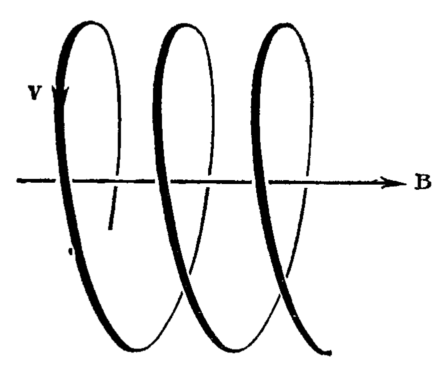
Она заставляет электрон двигаться по спирали, как это показано на фиг. 37. Такое движение называется *циклотронным*, а круговая частота вращения по спирали ω_c называется циклотронной частотой. Нетрудно показать (упражнение 2.3), что

$$\omega_c=\frac{eB}{m}. \tag{2.9}$$

2) *Движение вектора* **S**. Магнитное поле, действуя на магнитный момент $\boldsymbol{\mu}$, создает момент силы

$$\mathbf{G} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}, \tag{2.10}$$

который в свою очередь создает момент количества движения в направлении вектора **G** (фиг. 38, *а*). Поскольку электрон уже обладает моментом количества движения **S** (представленным на схеме отрезком *OS*), необходимый момент получится, если точку *S* перемещать вверх, т. е.,



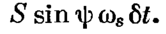
Фиг. 37. Траектория электрона в однородном магнитном поле.

как указано, в направлении вектора **G**. В итоге движение вектора **S** можно представить как вращение плоскости *P*, в которой лежат **S** и **B**, относительно **B** с постоянной угловой скоростью ω_s. При таком движении вектор **S** описывает конус с углом при вершине 2ψ и осью, направленной вдоль **B**. Такое движение, типичное для любого гироскопа, находящегося под действием внешней силы, называется *прецессией*. Когда $\psi = \pi/2$, вектор **S** вращается в плоскости, перпендикулярной вектору **B**. Такой частный случай, с которым мы и будем иметь дело в данном эксперименте, представлен на фиг. 38, *б*.

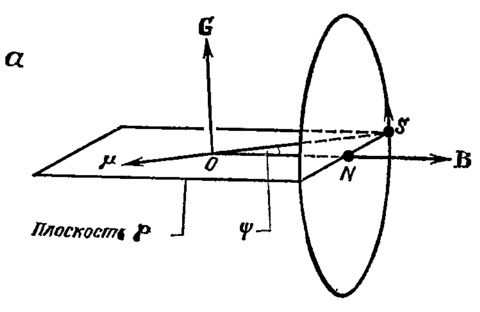
Величину ω_s нетрудно найти. За время δt момент силы **G** создает момент количества движения

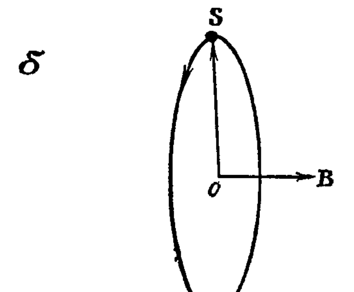
$$G\delta t = \mu B \sin \psi \, \delta t, \tag{2.11}$$

направленный вверх. Проекция вектора **S** на плоскость, перпендикулярную вектору **B** (изображена на фиг. 38, *а* отрезком NS), равна $S \sin \psi$, и поэтому момент количества движения, возникающий в направлении вверх за время δt, есть



$$S \sin \psi\, \omega_s \delta t.$$





Фиг. 38. *а* — прецессия вектора **S** (изображенного отрезком OS) в магнитном поле **B**.

Плоскость P вращается с угловой скоростью ω_S вокруг вектора B, при этом отрезок OS описывает конус с углом при вершине 2ψ.

б — прецессия в частном случае $\psi = \pi/2$.

Приравнивая эту величину правой части соотношения (2.11), получаем

$$\omega_s = \frac{\mu}{S} B = \frac{geB}{2m}. \tag{2.12}$$

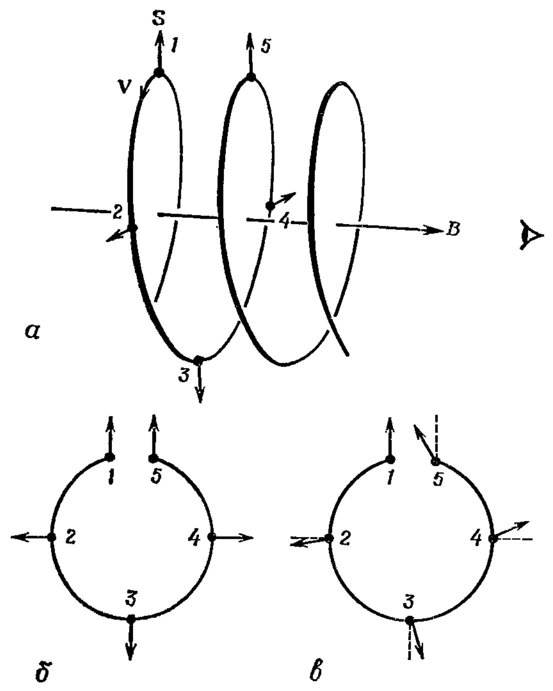
Введем для удобства величину a в соответствии с равенством

$$g = 2(1 + a). \tag{2.13}$$

Тогда формулу (2.12) можно переписать в виде

$$\omega_s = (1 + a)\frac{eB}{m} = (1 + a)\,\omega_c. \tag{2.14}$$

3) *Совместное движение векторов* **v** *и* **S**. Теперь объединим результаты, полученные в пунктах 1 и 2. Пусть вначале электрон находится в точке *1* (фиг. 39, *а*) и вектор его момента количества движения направлен, как показано, вверх. Электрон движется по спирали, проходя



Фиг. 39. Траектория электрона и поворот его спина в однородном магнитном поле.
В случаях *а* и *б* величина *g* точно равна 2, а в случае *в* немного больше 2.

точки *2*, *3*, *4* и, приходя в точку *5*, совершает полный оборот по спирали.

Допустим, что $a = 0$ (согласно теории Дирака). В таком случае $\omega_s = \omega_c$ и вектор **S** при перемещении электрона из точки *1* в точку *5* также совершает полный оборот. Это видно из фиг. 39, *а*, но еще нагляднее из фиг. 39, *б*, где представлен виток спирали, если смотреть на него в направлении, противоположном вектору **B**.

(Для удобства точки *1* и *5* на этом чертеже несколько разнесены.) Очевидно, что если вначале вектор **S** составляет прямой угол с направлением движения электрона, то же самое будет и в любой другой точке спирали.

Теперь предположим, что a — небольшая величина, отличная от нуля. Тогда частота ω_s немного больше ω_c и, когда электрон сделает один оборот по спирали, вектор **S** совершит несколько более одного оборота. Угол между вектором **S** и направлением движения электрона непрерывно меняется (фиг. 39, *в*). Из формулы (2.14) мы видим, что при переходе из точки *1* в точку *5* угол изменяется на величину $2\pi a \approx 2\pi/860$, т. е. на фигуре эффект сильно преувеличен.

При дальнейшем движении электрона по спирали угол между **S** и **v** продолжает увеличиваться, и в конце концов вектор **S** снова окажется в своем исходном положении относительно вектора **v**. Обозначим время, необходимое для этого, через T_D. За время T_D спин электрона сделает ровно на один оборот больше, чем сам электрон. Заметим, что через промежуток времени $T_D/4$ вектор **S** оказывается почти параллельным вектору **v** (*не строго* параллельным, ибо **S** всегда лежит в плоскости, перпендикулярной **B**, тогда как вектор **v** всегда направлен под малым постоянным углом к этой плоскости), а через промежуток времени $T_D/2$ вектор **S** перпендикулярен вектору **v** (но противоположен своему первоначальному перпендикулярному положению) и через промежуток $3T_D/4$ почти антипараллелен вектору **v**.

Движение можно проследить дальше. В конце каждого периода T_D соотношение между **S** и **v** повторяется. Круговая частота такого относительного движения равна

$$\omega_D = \omega_s - \omega_c = a\omega_c = a\frac{eB}{m}. \tag{2.15}$$

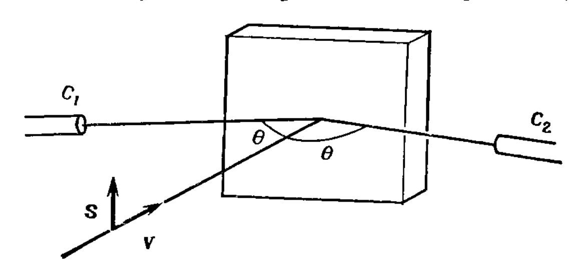
Значит, измеряя $T_D = 2\pi/\omega_D$ — период биений между циклотронным движением и прецессией,— мы тем самым непосредственно измеряем малую величину a, т. е. получаем g [1]).

---

[1]) Здесь мы изложили теорию несколько упрощенно, чтобы обратить внимание на важнейшие ее моменты. Строгая релятивистская теория дает несколько иные выражения для ω_c и ω_s. Правильный ответ для ω_c достигается простой заменой массы покоя на реля-

г. Поляризационные эффекты при рассеянии электронов. Пучок электронов, все спины которых направлены одинаково, называется полностью поляризованным — поперечно, если вектор **S** перпендикулярен вектору **v**, и продольно, если вектор **S** параллелен вектору **v**. Для данного эксперимента необходимо иметь, во-первых, поперечно-поляризованный пучок и, во-вторых, способ различать поперечную поляризацию от продольной

Рассмотрим следующий эксперимент по рассеянию электронов. Поперечно-поляризованный пучок падает на



Фиг. 40. Схема опыта по определению асимметрии рассеяния поперечно-поляризованных электронов.

тонкую мишень, содержащую атомы с довольно большим атомным номером, и при помощи двух одинаковых счетчиков Гейгера C_1 и C_2 регистрируется число электронов, рассеянных на одинаковые углы в плоскости, перпендикулярной вектору **S** (фиг. 40). Для нас важно то обстоятельство, что при углах θ, близких к 90°, влево рассеивается электронов больше, чем вправо. Такой эффект асимметрии был впервые предсказан в 1929 г.. Моттом, который рассчитал его величину (см. обзор по поляризации электронов [41]). Качественно эффект объясняется тем, что магнитный дипольный момент электрона взаимодействует с магнитным полем, которое действует на

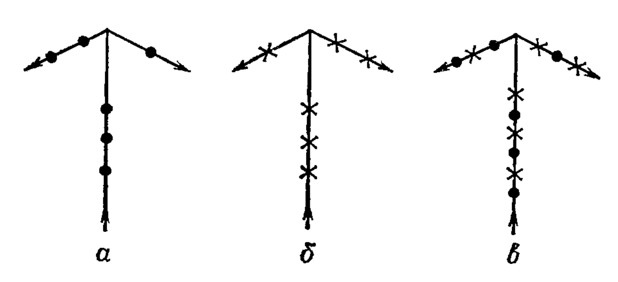
тивистскую массу. Поправка же для ω_s более сложная, но, как оказывается, соотношение

$$\omega_D = a\frac{eB}{m},$$

где m — масса *покоя*, остается в силе. Полная теория рассматриваемого вопроса изложена в книге [24].

электрон, движущийся в электрическом поле ядер. Если изменить направление вектора **S** на противоположное, характер асимметрии также станет обратным. Схематически это показано на фиг. 41, *а* и *б*.

Складывая числа электронов, соответствующие этим двум схемам, мы получаем схему фиг. 41, *в*, соответствующую рассеянию неполяризованного пучка. Число электронов, рассеянных вправо и влево, одинаково, но каждый из рассеянных пучков поперечно поляризован. Таким образом, мы решили первую задачу, а именно задачу получения подобного пучка. (На самом деле рассеянные пучки поляризованы лишь частично, т. е. не у всех



Фиг. 41. Схемы, поясняющие эффект асимметрии.

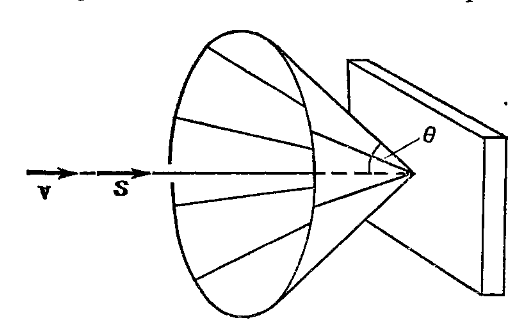
а — спин электронов направлен вверх; *б* — спин направлен вниз; *в* — первичный пучок электронов не поляризован, при этом число электронов, рассеянных вправо и влево, одинаково, но оба рассеянных пучка частично поляризованы.

электронов спины направлены одинаково. Тем не менее такой поляризации достаточно для нашего эксперимента.)

Предположим, что в эксперименте по рассеянию падающий пучок продольно поляризован. Тогда единственным естественно выделенным направлением оказывается общее направление векторов **S** и **v**. Все направления, составляющие с ним один и тот же угол θ, эквивалентны, что означает отсутствие асимметрии при рассеянии (фиг. 42). Так решается вторая поставленная задача. Если вектор **v** направлен по горизонтали, а вектор **S** лежит в вертикальной плоскости, то, измеряя относительную лево-правую асимметрию рассеяния на одинаковые углы в горизон-

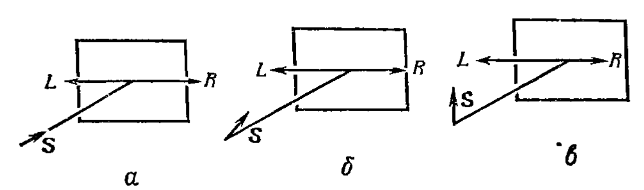
тальной плоскости, можно определить характер поляризации. В случае продольной поляризации симметрия будет равна нулю, а в случае поперечной поляризации она будет максимальной (фиг. 43).

д. Магнитная бутылка. Мы видели, что электрон должен сделать около 860 оборотов, прежде чем изменение угла между S и v достигнет одного периода (360°).



Фиг. 42. Продольно-поляризованные электроны рассеиваются во всех направлениях одинаково (под одним и тем же углом).

Очевидно, что чем больше периодов мы измерим, тем точнее будет конечный результат. Пусть мы поставили цель получить 600 периодов; это значит, что электрон



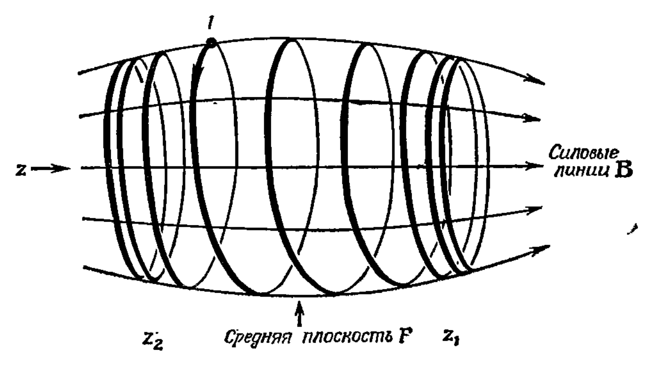
Фиг. 43. Длина стрелок L и R соответствует числу рассеянных электронов.

а — продольная поляризация, $L = R$; *б* — смешанная поляризация, $L > R$; *в* — поперечная поляризация, разность $L - R$ максимальна.

должен совершить 860 × 600, т. е. около полумиллиона, оборотов по спирали. При обычных условиях электрон

должен был бы двигаться по сильно сжатой спирали, чтобы сделать столь большое число витков на приемлемом для нас не слишком большом расстоянии вдоль вектора В. Получить такую спираль очень трудно. Поэтому экспериментаторы избирают иной путь.

Допустим, что магнитные силовые линии не параллельны, а искривлены так, что фиг. 44, где они изображены, напоминает бочку. Это соответствует усилению магнитного поля на краях, чего легко добиться, если, например, предусмотреть на краях дополнительные магнитные обмотки. Как повлияет такая выпуклая форма силовых линий на движение электрона? Когда электрон



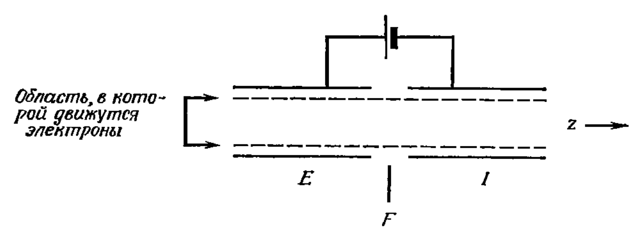
Фиг. 44. Траектория электрона, удерживаемого в пределах от z_2 до z_1.

Электрон движется по спирали то в одну, то в другую сторону, но для ясности изображена лишь траектория его движения слева направо.

находится в точке *1*, вертикальная составляющая вектора **B** создает силу Лоренца, которая заставляет электрон двигаться вправо. Нетрудно сообразить, что слева от средней плоскости *F* составляющая магнитного поля, обусловленная искривлением магнитных силовых линий, всегда ускоряет электрон вправо. Следовательно, шаг спирали увеличивается. (Шагом мы называем угол между вектором скорости **v** и плоскостью, перпендикулярной оси *z*, которая выбрана вдоль средней линии поля **B**.)

Шаг спирали достигает максимума в плоскости *F*, ибо справа от нее эффект оказывается противоположным.

Здесь вертикальная составляющая поля уже уменьшает шаг, который постепенно доходит до нуля и затем становится отрицательным. Иными словами, электрон достигает правой предельной плоскости ($z = z_1$) и по спирали возвращается влево. При любом z по абсолютной величине шаг совпадает с тем, который был при движении вправо; вновь максимум достигается в плоскости F и нуль — при $z = z_2$. Дойдя до левой предельной плоскости, электрон опять начинает двигаться вправо. Таким образом, он оказывается как бы в магнитной «бутылке», в которой он мечется по спирали между z_1 и z_2. (В огромном масшта-



Фиг. 45. Схема электродов для захвата электронов.
Силовые линии магнитного поля не показаны.

бе это явление представлено в охватывающих Землю поясах Ван-Аллена, где заряженные частицы движутся по спирали в магнитном поле Земли туда и обратно.)

Мы еще не говорили о том, как электрон впервые попадает в магнитную бутылку. Если его просто инжектировать в магнитное поле, например слева, то он выйдет наружу справа. Шаг спирали будет расти до плоскости F, а затем уменьшаться; но он не уменьшится до нуля прежде, чем электрон достигнет конца бутылки.

Чтобы захватить электрон, устанавливают два полых цилиндрических электрода E и I (фиг. 45), которые охватывают спиральный путь электрона; промежуток, разделяющий цилиндры, совпадает со средней плоскостью F. На эти электроды, как показано на схеме, подают разность потенциалов, а электроны инжектируют слева. Когда электрон проходит через промежуток между электродами, разность потенциалов тормозит его в направле-

нии z. Шаг спирали очень быстро уменьшается и теперь уже достигает нуля в точке z_1, находящейся в пределах магнитного поля. Электрон меняет направление своего движения вдоль оси z на обратное, но еще до того, как он вновь достигнет промежутка, разность потенциалов снимают. Таким образом, при обратном прохождении электрона через промежуток уменьшение шага при первом прохождении ничем не компенсируется, и за счет выпуклости магнитного поля слева от средней плоскости шаг спирали падает до нуля в точке z_2.

Теперь электрон захвачен. Он может сделать столько циклотронных оборотов в магнитной бутылке, сколько мы пожелаем. Когда нам нужно определить состояние поляризации, мы подаем на цилиндрические электроды разность потенциалов обратного знака. Если в этот момент электрон находился в левом цилиндре, то, пройдя через промежуток, он получит ускорение. Увеличения шага спирали при этом будет достаточно для того, чтобы электрон смог выйти из магнитной бутылки справа.

е. Измерение магнитного поля. Магнитное поле измеряют методом *протонного магнитного резонанса* — очень точным и довольно простым методом, который дает абсолютное значение B.

Подобно электрону, протон также обладает спином и, следовательно, магнитным дипольным моментом, который мы обозначим через μ_p. В присутствии магнитного поля протон может находиться в одном из двух квантовых состояний, соответствующих направлениям спина вдоль или против поля, причем разность энергий таких состояний составляет $2\mu_p B$.

Чтобы измерить магнитное поле в некоторой точке, в этой точке помещают миниатюрную ампулу с несколькими миллилитрами водородсодержащего вещества. Ампула находится внутри катушки, которая соединена с генератором и создает слабое переменное магнитное поле с круговой частотой ω, направленное перпендикулярно постоянному полю $\mathbf{B}$. Если величина ω удовлетворяет соотношению

$$\hbar\omega = 2\mu_p B, \tag{2.16}$$

то переменное магнитное поле возбуждает переходы между

двумя возможными состояниями протонов. Отношение числа протонов в низшем энергетическом состоянии к числу протонов в высшем энергетическом состоянии равно больцмановскому множителю $e^{2\mu_p B/kT}$, так что, хотя вероятность переходов, вызванных возмущающим полем, в любом направлении одинакова, число протонных переходов в верхнее состояние превышает число переходов в нижнее. Таким образом, при резонансной частоте система поглощает энергию переменного магнитного поля.

Равенство (2.16) можно переписать в следующем виде:

$$\omega = \gamma_p B, \qquad (2.17)$$

где

$$\gamma_p = \frac{\mu_p}{\hbar/2} \qquad (2.18)$$

— *гиромагнитное отношение* протона. Эта величина измерена весьма точно, и в настоящее время для нее принято значение [4] [1])

$$\gamma_p = (2{,}675\,192 \pm 0{,}000\,007)\cdot 10^{-8}\ \text{рад}\cdot\text{с}^{-1}\ \text{Т}^{-1}. \qquad (2.19)$$

Резонанс этот довольно просто зарегистрировать. И тогда измерение величины B (при известной величине γ_p) сводится к измерению резонансной частоты, что можно легко сделать с высокой точностью.

Метод протонного резонанса применяется для измерения магнитных полей в интервале 10—2000 мТ, который соответствует ВЧ-диапазону 400 кГц — 80 МГц. Точность, которой можно при этом добиться,— порядка 10^{-5}. Здесь мы коснулись лишь основы метода· для более подробного его изучения рекомендуем книгу [38] [2]).

ж. Описание эксперимента. На фиг. 46 представлена схема установки. Размеры вакуумной камеры V таковы: диаметр 0,3 м, длина 5,5 м. Бочкообразное магнитное поле **B** создается при помощи обмотки (на схеме не показанной), располагающейся на очень жестком каркасе

---

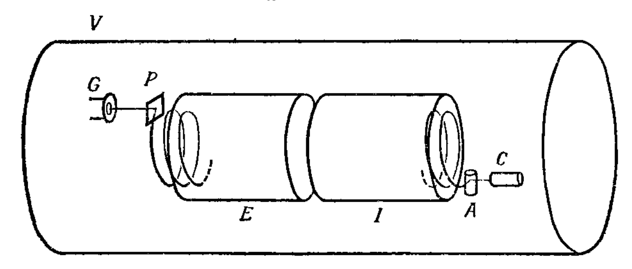
[1]) Т — единица измерения магнитной индукции B в системе единиц СИ — тесла. 1Т = 1 Вб·м$^{-2}$ = 10^4 Гс.

[2]) См. также в книге «Экспериментальная ядерная физика», под ред. Э. Сегре, М., 1955.— *Прим. ред.*

вокруг вакуумной камеры. Величину *B* можно менять в пределах от 10 до 15 мТ.

Когда на электронную пушку *G* подают пусковой сигнал, она в течение 0,1 мкс испускает электроны с энергией, которую можно изменять от 50 до 100 кэВ. Сигнал же подается на пушку 500 раз в секунду.

Электроны падают на тонкую золотую фольгу *P*, которая служит поляризатором, и затем часть из



Фиг. 46. Схема установки (не в масштабе).

них, рассеянная вправо на угол, немного меньший 90°, проходит через коллимирующую систему (не показанную на схеме) и начинает двигаться по спирали внутри цилиндрических электродов *E* и *I*. Чуть-чуть раньше, нежели электроны войдут в эту систему, на электрод *I* подается отрицательное напряжение (70 В). Поэтому при прохождении электронов через промежуток между электродами *E* и *I* шаг их спирали уменьшается. Перед обратным прохождением электронами промежутка напряжение с цилиндра *I* снимается, и электроны оказываются захваченными. Момент времени, когда с электрода *I* снимается напряжение, можно считать началом цикла.

Спустя заданное время *t* на электрод *E* подается отрицательное напряжение. В результате этого электроны, находившиеся внутри электрода *E*, покидают ловушку [1]) и попадают на вторую золотую фольгу *A*, которая служит анализатором. Электроны, рассеянные

[1]) Вначале электроны образуют как бы сгусток, который, однако, вскоре расплывается, так что из системы цилиндрических электродов выходит примерно половина из них.

примерно на угол 90° в направлении, параллельном оси камеры и соответствующем рассеянию вправо, попадают в счетчик Гейгера C. Затем вновь подается пусковой сигнал на электронную пушку, и весь цикл повторяется.

Вы можете заметить, что в схеме только один счетчик Гейгера. Экспериментаторы применили очень остроумный метод измерения асимметрии рассеяния в мишени A. Одним пересчетным устройством они регистрируют число отсчетов от 64 последовательных электронных сгустков, удерживаемых одно и то же время t. Затем время удержания захваченных электронов изменяют до $t + {}^1/_2T_D$ и другим пересчетным устройством регистрируют число отсчетов, создаваемых следующей серией из 64 сгустков. В установке предусмотрено автоматическое чередование времен удержания и вся информация накапливается в двух пересчетных устройствах.

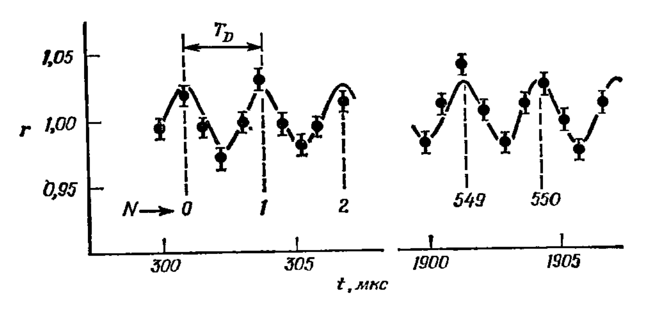
Все зарегистрированные события соответствуют правому рассеянию электронов в мишени A. Но число зарегистрированных электронов в случае времени удержания $t + {}^1/_2T_D$ равно числу случаев левого рассеяния при времени удержания t. Это объясняется тем, что при увеличении времени удержания на ${}^1/_2T_D$ направление вектора **S** относительно вектора **v** меняется на обратное, а следовательно, как мы уже видели, изменяется на обратную и асимметрия. Конечно, при таком методе необходимо знать величину T_D, а ее-то мы и хотим измерить. Но в данном случае вполне достаточно, если она известна лишь приближенно.

Меняя величину t, мы каждый раз определяем r — отношение чисел отсчетов, которые соответствуют времени удержания t и $t + {}^1/_2T_D$. Поскольку пучок электронов лишь частично поляризован после рассеяния в первой мишени P, не следует ожидать большой асимметрии даже в максимуме. Некоторые результаты эксперимента приведены на фиг. 47, где представлен график зависимости r от t.

На этом графике указана величина T_D. Но, как мы уже говорили, желательно измерить NT_D, где N — большое число периодов. Поэтому экспериментаторы повторили измерения при значительно больших временах удержания и провели необходимые промежуточные изме-

рения, чтобы гарантировать правильность определения N. В итоге значение T_D было найдено по расстоянию между нулевым и N-м максимумами полученных кривых асимметрии.

Время удержания t контролировалось при помощи кварцевого генератора, частота колебаний которого поверялась по сигналам стандартной частоты, передаваемым радиостанцией WWV [1]).



Фиг. 47. Результаты эксперимента.
Зависимость асимметрии r от времени удержания t.

Магнитное поле B при разных z измерялось методом протонного резонанса. При каждом значении z поле было измерено в четырех азимутальных положениях, а затем определялось среднее значение. Максимальный разброс составлял примерно $3 \cdot 10^{-5}$. Для создания необходимого искривления силовых линий магнитного поля требуется лишь небольшое изменение B вдоль оси z. Напряженность поля на краях превышала его напряженность в центре на 0,1% (кривизна линий на фиг. 44 сильно преувеличена). Поле B в формуле (2.15) — это величина, усредненная по всему пути движения электрона. Чтобы получить точное средневзвешенное значение величины B, нужно очень аккуратно проводить и измерения и вычисления.

Постоянство магнитного поля обеспечивалось при помощи системы автоматического регулирования. Протон-

---

[1]) Это радиостанция Национального бюро стандартов США (в Вашингтоне), которая передает ряд специальных сигналов точного времени и стандартной частоты.— *Прим. ред.*

ный датчик вырабатывал сигнал, зависящий от напряженности магнитного поля. Этот сигнал подавался на вход электронной схемы, которая стабилизировала ток в обмотках, создающих магнитное поле. Таким способом суточный дрейф магнитного поля был снижен до величины 10^{-5}.

Радиальные электрические поля рассеяния, проникающие внутрь цилиндрических электродов E и I, слегка изменяют характер движения электрона, влияя главным образом на величину циклотронной частоты. Этот эффект зависит от энергии электрона, причем при меньших энергиях он больше. С подобным источником систематических ошибок экспериментаторы борются двумя способами. Во-первых, они стараются по возможности уменьшить эффект. В предварительном опыте электрон заставляли двигаться между двумя концентрическими цилиндрами. Когда же внутренний цилиндр убрали, влияние электрического поля существенно ослабилось. Во-вторых, было получено теоретическое выражение для соответствующей поправки. Весь эксперимент повторялся при четырех разных значениях энергии электронов, и в каждом случае устанавливали свое магнитное поле. При этом результаты изменялись так, как и следовало из теории. Поэтому их можно было уверенно экстраполировать к предельному случаю, когда эффект равен нулю.

з. *Замечания.* Отметим некоторые особенности данного эксперимента.

1) Искомая величина есть

$$g = 2(1 + a), \qquad (2.20)$$

где a равно примерно 1/860. Спланировав эксперимент так, чтобы измерялась непосредственно величина a, авторы обеспечили себе большое преимущество. Какой бы ни была конечная точность измерения величины a, точность определения g всегда будет в 860 раз выше — прекрасная иллюстрация к случаю I, рассмотренному на стр. 63.

2) Время удержания t, отложенное по оси абсцисс на фиг. 47, представляет собой интервал времени между двумя сигналами: первым, при котором на электрод I подается напряжение, обеспечивающее захват электрона, и вто-

рым — импульсом напряжения на электрод E, обеспечивающим вывод электронов. Но оно не равно фактическому времени вращения вектора $\mathbf{S}$ относительно вектора скорости $\mathbf{v}$. В импульсных схемах существуют различные задержки, и электрон, конечно, попадает в магнитное поле чуть раньше, чем появляется первый импульс (импульс захвата), и остается еще некоторое время в поле после второго импульса. Но все это *постоянные* краевые эффекты. Если определить величину T_D по *разности* между двумя максимумами на кривой асимметрии, то эти эффекты исключаются.

Когда мы говорили об измерительной линейке, то привели очень простой пример того, как исключают ошибку отсчета нуля методом вычитания. Здесь мы встретились с более сложным примером того же метода.

3) Укажем, какие преимущества дает метод измерения асимметрии одним-единственным счетчиком. Допустим, что асимметрию измеряли бы, как обычно, двумя счетчиками (фиг. 40). Тогда могла бы возникнуть ложная асимметрия, обусловленная различием в чувствительности, телесном угле, угле рассеяния и уровне фона обоих счетчиков. Методика же, примененная в данном эксперименте, обеспечивает автоматическое исключение всех этих источников ошибок.

4) Отметим, наконец, то, каким образом экспериментаторы расправились с ошибками, обусловленными продольным электрическим полем рассеяния. Точно так же обычно поступают с любой систематической ошибкой. Сначала ее по возможности уменьшают, а затем вводят поправку, учитывающую оставшуюся часть. И значительно лучше, если поправку можно ввести эмпирически, т. е. на основании измерений, как и делается в данном случае.

и. Результат эксперимента. Приняв все меры предосторожности — и уже упомянутые, и некоторые, о которых мы не говорили,— проведя много серий измерений, Уилкинсон и Крейн получили в итоге следующую величину:

$$a = 0{,}001\,159\,622 + 0{,}000\,000\,027. \qquad (2.21)$$

Таким образом, величина a оказалась измеренной с точностью 1/40 000, а величина g — с точностью 1/40 000 000.

Из теории же следует [35], что

$$a=\frac{\alpha}{2\pi}-0{,}328\frac{\alpha^2}{\pi^2}+O\left(\frac{\alpha^3}{\pi^3}\right). \qquad (2.22)$$

Если пренебречь неизвестным членом порядка α^3/π^3 и взять для величины α значение, указанное в приложении 7, то мы получим теоретическое значение

$$a = 0{,}001\,159\,615. \qquad (2.23)$$

Вопрос о физическом смысле величины a выходит за пределы нашей книги. Согласно современным теоретическим воззрениям, понятие вакуума оказывается сложнее, чем предполагалось ранее. В вакууме электрон создает виртуальные фотоны, которые в свою очередь воздействуют на электрон, и это приводит к тому, что его гиромагнитное отношение оказывается несколько иным, нежели в первоначальной теории Дирака.

В одних областях физики мы добились большего, а в других меньшего успеха. Но то, что в данной области физики возможны столь точные теоретические предсказания и для их проверки проводятся эксперименты такой же высокой степени точности, можно лишь приветствовать как победу человеческого ума.

Упражнения

2.1. Требуется, чтобы в потенциометр с внутренним сопротивлением R, присоединенный к точкам J и K (фиг. 30), лишь доля f тока поступала от источника E, а остальное — от источника G. Показать, что если э. д. с. источника G в v раз больше э. д. с. источника E, то величину S следует выбрать из условия

$$\frac{S}{R}=\frac{v-1}{1-f}.$$

2.2. Показать, что магнитный момент μ_1 и момент количества движения $\mathbf{L}$ электрона, движущегося по круговой орбите, связаны соотношением

$$\mu_1=-\frac{e}{2m}\mathbf{L}.$$

2.3. Доказать, что

$$\omega_c = \frac{eB}{m} \qquad \text{[см. формулу (2.9)].}$$

2.4. Чему равно отношение числа протонов в спиновом состоянии с меньшей энергией к числу протонов с большей энергией при $B = 10$ мТ и $T = 300$ К?

2.5. В данной главе описаны и проанализированы приборы и установки трех разных видов. Таким же образом проанализируйте интерферометр Фабри — Перо и разберите при этом метод простых дробей.

2.6. Объясните, в чем состоит метод дублетов, которым пользуются в точной масс-спектрометрии.

2.7. В интервале температур от 100 до 300 К *орто-* и *пара*водород различаются по теплопроводности на несколько процентов. Продумайте методику определения отношения числа *орто-* к числу *пара*водородных молекул в заданном объеме, основанную на принципе измерения теплопроводности газа при помощи нагретой проволоки. (Метод нагретой проволоки рассматривается в книге [30].)

ГЛАВА 3

ЛОГИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

§ 1. Введение

Систематическая ошибка — это смягченное выражение, заменяющее слова «ошибка экспериментатора». Такие ошибки возникают из-за того, что

а) неточны измерительные приборы,

б) реальная установка в чем-то отличается от идеальной,

в) не совсем верна теория явления, т. е. не учтены какие-то эффекты.

Как поступать в первом случае, мы уже знаем — нужна калибровка или градуировка. В двух других случаях готового рецепта не существует. Чем лучше вы знаете физику, чем больше у вас опыта, тем больше вероятность, что вы обнаружите подобные эффекты, а значит, и устраните их. Но существуют такие способы проведения измерений и выбора их последовательности, которые позволяют автоматически выявить, а иногда и исключить некоторые виды ошибок. Подобные приемы и составляют предмет настоящей главы. Одни из них довольно специфические, а другие носят более общий характер и связаны с психологией экспериментатора.

Выявление и устранение систематической ошибки может выглядеть, как действие негативное, хотя и желаемое. Однако в этом содержится и нечто более важное. Вскрытая нами систематическая ошибка может быть обусловлена явлением, прежде неизвестным. И тогда она переходит из ранга «ошибки» в ранг «эффекта». Другими словами, тщательно проведенные измерения могут привести к открытию и расширить наши представления.

§ 2. Кажущаяся симметрия аппаратуры

Есть хорошее правило: если вам кажется, что в аппаратуре имеется какая-то симметрия, т. е. замена одной величины на противоположную или перестановка двух

ее частей не должна приводить к какому-либо изменению или должна приводить к предсказуемому эффекту (см. пример «в»), то обязательно произведите такую замену или перестановку. Ниже приводятся несколько примеров.

а) Допустим, что при помощи потенциометра (гл. 2, § 1) проводится сравнение двух сопротивлений и нам ничего не известно о термоэлектрическом эффекте. В данном случае схема должна бы быть симметричной относительно направления тока. Это значит, что при изменении направления токов в обеих цепях баланс не должен нарушаться. Но на самом деле оказывается, что это не так. Тем самым обнаруживается наличие чего-то, чего мы не учитывали. Исследуя это явление, мы находим причину, а именно термо-э. д. с., не зависящую от направления основных токов в схеме. В таком случае устранить ошибку можно простым усреднением отсчетов, соответствующих двум состояниям баланса.

б) Рассмотрим, к примеру, эксперимент по измерению теплопроводности какого-нибудь материала, где требуется измерять разность температур $\Delta\theta$ между точками P и Q. Предположим, что для этого мы взяли два одинаковых термометра и измеряем температуру непосредственно в точках P и Q. В силу симметрии, поменяв термометры местами, мы не должны изменить результата. Переставляем термометры и убеждаемся, что это не так, обнаруживая тем самым ошибочность их показаний. Если разность $\Delta\theta$ мала, то ее величина, полученная на основании одной лишь пары показаний термометров, будет существенно искаженной. Поменяв термометры местами и взяв затем среднее из двух значений $\Delta\theta$, мы заметно уменьшим ошибку. (Если величина $\Delta\theta$ мала, то еще лучше ее измерять непосредственно, чтобы избежать нежелательной операции — находить разность двух почти одинаковых величин. Сделать это можно с помощью платиновых термометров сопротивления, поместив их в точки P и Q и включив в соответствующие плечи мостика Уитстона.)

в) Наш третий пример — сам мостик Уитстона. Посмотрим на схему, изображенную на фиг. 48. Здесь R — неизвестное сопротивление, а S — образцовый резистор — сопротивление известной величины. Величину R можно

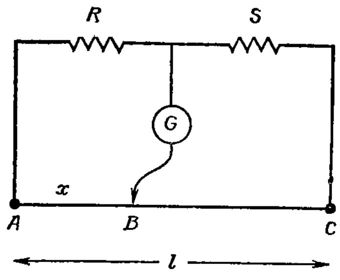
найти, измерив расстояние AB, соответствующее балансу токов. Обозначим AB через x_1, а AC через l. Тогда

$$\frac{R}{S}=\frac{x_1}{l-x_1}. \tag{3.1}$$

В силу симметрии, поменяв местами R и S, мы должны получить новое значение AB:

$$x_2 = l - x_1. \tag{3.2}$$

Проделав это, получаем иное значение. Перестановка позволила выявить наличие краевых эффектов. Но в данном случае, заменив величину x_1 в формуле (3.1) средним между x_1 и $l - x_2$, мы не устраним ошибки.



Фиг. 48. Мостик Уитстона.

§ 3. Последовательность измерений

Порядок проведения измерений может иметь очень важное значение, и это видно из следующего примера. Трех студентов просят определить, как конечная скорость шарика, падающего в жидкости, зависит от его диаметра. Для этого им даны 4 шарика разных размеров и большой сосуд с глицерином.

Студент X берет самый большой шарик и измеряет его конечную скорость 5 раз подряд, затем берет шарик поменьше и проделывает с ним то же самое, и так — до самого маленького шарика. В итоге он получает неправильный результат. Почему? Потому что за время измерений лабораторное помещение нагрелось, а с ним нагрелся и глицерин. Вязкость глицерина, как и большинства жидкостей, резко падает с ростом температуры. Конечная же скорость шарика зависит не только от его диаметра, но и от вязкости жидкости. Следовательно, из-за того, что с разными шариками измерения проводились при разных средних вязкостях, полученные результаты

отражают зависимость конечной скорости не только от диаметра.

Студент Y знает физику лучше, чем студент X, и ему известна зависимость конечной скорости от вязкости, а значит, и от температуры. Поэтому он создает устройство для поддержания температуры глицерина постоянной. Измерения он проводит в той же последовательности, что и студент X, и получает результат значительно лучший, но все еще неверный. Почему? Просто Y не знает, что часы, которыми он пользуется при измерении скорости, постепенно замедляют свой ход, а это вносит эффект, систематически меняющийся от шарика к шарику.

Третий студент Z так же, как X, игнорирует температурный эффект при измерениях, и часы у него с точно таким же дефектом, как и у студента Y, но он получает очень хороший результат. Объясняется это последовательностью, в которой он (инстинктивно) проводил измерения.

Обозначим шарики буквами A, B, C и D. Допустим, что вместо пяти последовательных измерений с шариком A, затем пяти с шариком B и т. д. измерения проводятся в следующем порядке:

$$ABCDABCD.$$

Теперь вместо измерений с шариком A при высокой вязкости и измерений с шариком D при низкой вязкости проводятся измерения со всеми четырьмя шариками при высокой вязкости, затем вновь со всеми — при более низкой и т. д. Хотя при таком порядке измерений систематическая ошибка существенно снижается, в пределах каждой серии из четырех измерений первый шарик A исследуется при бóльшей вязкости жидкости, чем последний шарик D. Поэтому еще лучше порядок

$$ABCDDCBA, \tag{3.3}$$

повторяемый столько раз, сколько позволяет отведенное на опыт время. Так именно и поступил студент Z. [Еще надежнее было бы после измерений (3.3) проводить измерения $BCDAADCB$ и т. д.] Нетрудно сообразить, что во всей серии таких измерений эффекты постепенного изменения вязкости со временем или точности хода часов

или любого иного фактора (помимо диаметра шарика) будут, по всей вероятности, малы.

Укажем, что и метод студента Z можно улучшить. Он, пожалуй, напрасно пренебрег влиянием температуры. Результаты измерения в данном опыте столь сильно зависят от температуры жидкости, что искушенный экспериментатор не только проводил бы измерения в том же порядке, что и студент Z, но еще и периодически измерял бы температуру. Это необходимо, чтобы выяснить, нет ли случайно корреляции между изменениями температуры и последовательностью диаметров.

§ 4. Умышленные и неумышленные изменения

При исследовании эффекта, обусловленного изменением одной из величин, следует, очевидно, стараться остальные поддерживать постоянными. Но всегда есть какая-то вероятность, что эти величины изменяются, и в предыдущем параграфе был изложен метод, позволяющий уменьшить подобные влияния. Метод весьма эффективен, но пригоден лишь тогда, когда нежелательные изменения не вызываются самой варьируемой величиной. Именно так и было в предыдущем примере. Ни температура глицерина, ни точность хода часов не зависят от того, какой из шариков мы выбираем для очередного бросания.

Рассмотрим, однако, следующий эксперимент. Мы хотим определить, как изменяются размеры образца из ферромагнитного материала под действием магнитного поля, т. е. исследовать явление магнитострикции. В соленоид помещают железный стержень и измеряют его длину в зависимости от тока через соленоид, характеризующего напряженность магнитного поля.

Известно, что магнитострикционное изменение длины очень мало — относительное изменение при полном намагничивании составляет примерно $5 \cdot 10^{-5}$,— и поэтому для обеспечения нужной точности измерений температуру образца необходимо поддерживать постоянной; в противном случае эффект магнитострикции будет замаскирован тепловым расширением. При увеличении тока через соленоид возрастает выделяемое им тепло, и в результате этого может повыситься температура образца. Поэтому

здесь совершенно неприменим метод, изложенный в предыдущем параграфе,— варьируемая нами величина *вызывает* нежелательное изменение. Мы должны добиться, чтобы ток в соленоиде не оказывал влияния на температуру образца. Для этого можно, например, предусмотреть водяное охлаждение соленоида.

Обратный эффект также может вызывать ошибки. Ток в обмотке нагревателя создает магнитное поле, которое может повлиять на результаты измерений.

§ 5. Дрейф

В § 3 был рассмотрен пример медленного и плавного изменения, или *дрейфа*, который продолжается в течение всего эксперимента. Помимо температуры, из других обычно встречающихся величин медленно изменяться могут атмосферное давление и влажность воздуха, э. д. с. аккумулятора, а также напряжение в сети переменного тока и даже его частота.

Влияние таких изменений можно уменьшить, если правильно выбрать последовательность измерений, но часто бывает желательно с самого начала исключить изменения или по крайней мере свести их к минимуму. Обычно для этого пользуются различными схемами с отрицательной обратной связью или системами автоматического регулирования (гл. 1, § 7 и 8).

В § 3 данной главы мы встретились также с примером *аппаратурных* изменений. Следует всегда иметь в виду, что в аппаратуре и в приборах возможен дрейф — может изменяться и положение нуля, и чувствительность. Поэтому иногда приходится повторять калибровку приборов в ходе эксперимента, и даже много раз.

Заметим, что при той или иной последовательности измерений и сама операция калибровки может приводить к систематической ошибке. Пусть, например, при помощи потенциометра сравнивают два напряжения V_1 и V_2. Э. д. с. элемента в потенциометре постепенно уменьшается со временем. Поэтому, если после калибровки прибора каждый раз измеряют сначала V_1, а затем V_2, то величина $|V_1/V_2|$ будет систематически заниженной.

§ 6. Систематические изменения

Взгляните на данные табл. 8, где представлены результаты измерений диаметра (d) провода в разных точках (x) вдоль его длины. Как следует поступить, если требуется

Таблица 8

ДИАМЕТР ПРОВОДА, ИЗМЕРЕННЫЙ В РАЗНЫХ ТОЧКАХ ВДОЛЬ ЕГО ДЛИНЫ

Длина, м	Диаметр, мм	Длина, м	Диаметр, мм
0,0	1,259	0,3	1,209
0,0	1,263	0,4	1,214
0,0	1,259	0,5	1,225
0,0	1,261	0,6	1,248
0,0	1,258	0,7	1,258
0,1	1,252	0,8	1,256
0,2	1,234	0,9	1,233

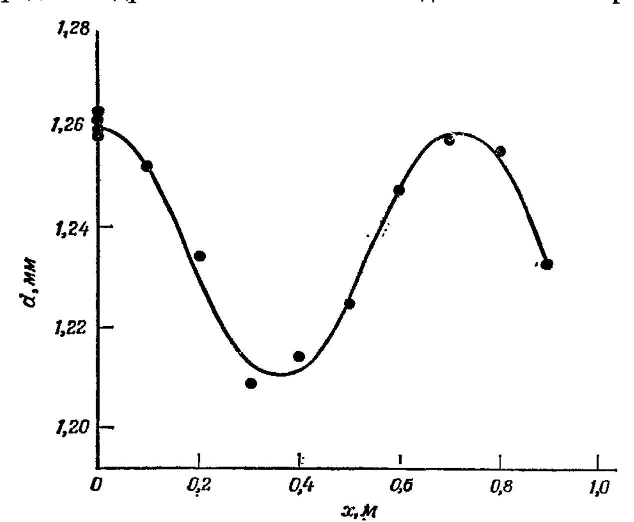
найти наилучшее значение диаметра и среднеквадратичную ошибку отдельного измерения? (Остановитесь здесь и подумайте.)

Посмотрим, как решили бы эту задачу наши друзья X и Y. У студента X нет никаких сомнений. Ему говорили, что наилучшее значение некоторой величины — среднее из серии измерений, и у него есть формула для вычисления среднеквадратичной ошибки. Он рад стараться и следует указанным ему правилам. Он находит среднее из всех значений диаметра, которое оказалось равным 1,245 мм, и по формуле (2.36) из первой части книги вычисляет величину σ, которая оказывается равной 0,020 мм.

А вот Y замечает, что результаты измерений изменяются не случайным образом, и поэтому строит график, изображенный на фиг. 49. Теперь очевидно, что изменения носят некоторый систематический характер. Ему ясно, что среднее по всем измеренным значениям не имеет смысла. При $x = 0$ диаметр был измерен 5 раз, так что значение при $x = 0$ было бы взято со слишком большим весом. Поэтому пять значений он заменяет их средним,

равным 1,260. Теперь он имеет набор из десяти величин и, взяв их среднее значение, получает в качестве наилучшей оценки 1,239 мм.

Далее, он приходит к выводу, что, поскольку диаметр явно изменяется по длине провода, разброс значений d во всем интервале изменения x не имеет ничего общего со среднеквадратичной ошибкой отдельного измерения.



Фиг. 49. Диаметр провода d в разных точках x.
На графике представлены данные табл. 8.

Чтобы найти последнюю, он определяет разброс пяти значений, полученных при $x = 0$, и в качестве оценки σ получает величину 0,002 мм. (Случайная ли это ошибка или просто сечение провода не круглое при $x = 0$, сказать нельзя, если об измерениях больше ничего не известно.)

Студент Y подошел к задаче разумно, но нужно отметить одно обстоятельство в связи с понятием «наилучшего значения» диаметра d. Поскольку d изменяется систематически, необходимой нам величиной не обязательно будет d_m, т. е. среднее, которое нашел студент Y. Если, к примеру, мы измерили сопротивление провода и хотим найти удельное сопротивление его материала, то нам нужно найти среднее значение величины $1/d^2$, которое

вовсе не равно $1/d_m^2$. Правда, в данном случае разница невелика, но в принципе она существует, и поэтому нужно правильно проводить усреднение.

Разберем еще одну ситуацию, которая возникает, когда разброс в серии измеренных величин превышает приписанную им ошибку. В табл. 9 приведены данные измерения скорости звука в воздухе при комнатной температуре. Мы можем предположить, что это результаты измерения длины стоячих волн в резонансной трубке при разных частотах. Допустим, что при каждом значении частоты было проведено большое число измерений и разброс данных внутри каждой такой серии характеризуется среднеквадратичной ошибкой

$$\sigma = 0,7 \text{ м} \cdot c^{-1}. \qquad (3.4)$$

Таблица 9

ИЗМЕРЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СКОРОСТИ ЗВУКА

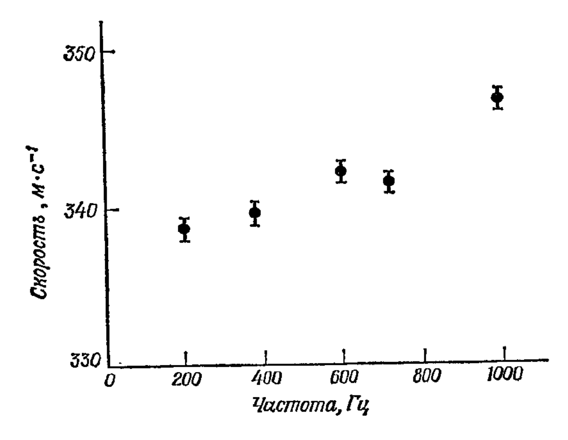
Частота, Гц	Скорость, м/с
1000	346,7
720	341,5
200	338,6
600	342,2
380	339,6

В подобном случае некоторые студенты просто вычисляют среднее значение из пяти результатов и в качестве ошибки среднего находят

$$\sigma_m = \frac{0,7}{\sqrt{5}} \approx 0,3 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}, \qquad (3.5)$$

при этом слепо игнорируя то обстоятельство, что три результата из пяти отличаются от среднего на 3σ, 4σ и 7σ. Если величина σ (3.4) правильна, то, очевидно, налицо какой-то систематический эффект, и пока он не найден, ни среднему, ни его ошибке σ_m не следует придавать большого значения. Во всех волновых явлениях возможна зависимость скорости от частоты. Такое явление носит название дисперсии. Что касается звуковых волн в воздухе, то тщательные измерения многих экспериментаторов показали отсутствие заметной дисперсии при частотах, представленных в табл. 9. Но в любом опыте с резонансной трубкой приходится вводить поправки, которые зависят от частоты [46]. Возможно, что систематическая ошибка в этих поправках и является причиной подобных вариаций.

Поэтому мы строим график, откладывая по одной оси скорость звука, а по другой частоту (фиг. 50). Создается впечатление, что действительно существует корреляция, и, если подобные измерения не составляют большого труда, следовало бы их провести еще и при других частотах для проверки наблюдаемого эффекта. Если он подтвердится, то придется тщательно исследовать зависящие от частоты поправки. Если же он не подтверждается, то причину придется искать где-то еще. Этот пример показывает, как поступать в подобных случаях, которые отнюдь не редки.



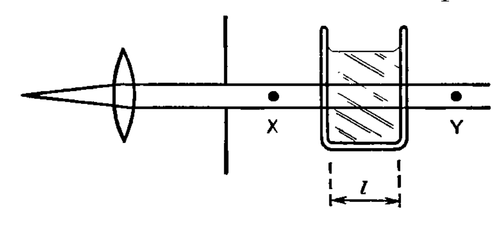
Фиг. 50. Результаты измерения скорости звука при разных частотах (данные табл. 9).

§ 7. Поправки вычисленные и эмпирические

Во многих экспериментах для учета систематических эффектов необходимо вводить поправки. При этом всегда следует отдавать предпочтение эмпирическим методам, т. е. методам, основанным на измерениях, а не теоретическим вычислениям. Последние могут оказаться ошибочными по целому ряду причин — неверна теория, неправильные предположения, ошибки вычисления,— тогда

как эмпирические методы по самой своей сущности в меньшей степени подвержены ошибкам.

Допустим, например, что мы исследуем вопрос о том, в какой мере некоторая жидкость пропускает свет с данной длиной волны. Мы наливаем жидкость в стеклянную кювету, стенки которой расположены перпендикулярно



Фиг. 51. Установка для измерения коэффициента поглощения света в жидкости.

направлению светового пучка (фиг. 51), и в точках X и Y измеряем интенсивность света I_x и I_y. Пусть для простоты коэффициент пропускания

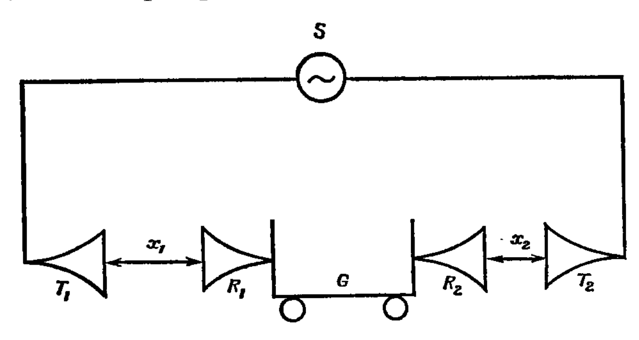
$$f = \frac{I_y}{I_x} \tag{3.6}$$

оказался не зависящим от I_x. Нам нужно определить величину f, соответствующую толще l самой жидкости. Кювета не может быть абсолютно прозрачной, и поэтому в результаты измерений необходимо ввести поправку на ослабление света двумя стенками.

Чтобы найти поправку теоретическим путем, следовало бы измерить толщину стенок и по таблицам физических констант найти ослабление, вызываемое данной толщиной стекла данного сорта при данной длине световой волны. Даже если подобная информация получена, поправка будет зависеть от того, насколько точно нам известна толщина стенок — а они скорее всего неоднородны,— и поэтому требуется аккуратно усреднить эту величину по поперечному сечению светового пучка. Такая поправка будет зависеть также от того, насколько точно мы знаем длину волны света, и, помимо всего, от того, в какой мере табличные данные соответствуют сорту стекла, из которого сделана наша кювета.

Эмпирический же метод состоит в том, что сначала в точках X и Y измеряют интенсивность с пустой кюветой, а затем, не меняя ее положения относительно светового пучка, кювету заполняют жидкостью и измерения повторяют. Вы видите, что при таком методе отпадают все перечисленные выше трудности.

Хотя эмпирические поправки следует предпочитать теоретическим, лучше всего определять поправки обоими методами и проверять, насколько они согласуются.



Фиг. 52. Измерение длины волны в эксперименте Фрума.

Примером тому могут служить измерения скорости света, проведенные Фрумом (стр. 150). Его метод основан на определении частоты ν и длины волны λ СВЧ-излучения, т. е. электромагнитного излучения с длиной волны порядка 10 мм.

Метод измерения длины волны (которое составляет лишь часть рассматриваемого эксперимента) поясняется схемой фиг. 52. СВЧ-сигнал от генератора S разделяют на два сигнала и подают их на рупоры-излучатели T_1 и T_2. Излучение этих рупоров принимается рупорами R_1 и R_2, и соответствующие сигналы складываются в специальном устройстве, не показанном на схеме. Величина суммарного сигнала зависит от соотношения фаз сигналов, принятых рупорами R_1 и R_2. Если эти сигналы находятся точно в фазе, то сигнал максимален, а если точно в противофазе, то сигнал равен нулю. Независимо от расстояний x_1 и x_2 сигналы, принятые рупорами R_1 и R_2,

всегда складываются с одинаковыми амплитудами. (Это достигается регулировкой амплитуд сигналов, излучаемых рупорами T_1 и T_2, без изменения их фаз.) Рупоры R_1 и R_2 укреплены на тележке G, так что можно изменять расстояния x_1 и x_2, не меняя их суммы $x_1 + x_2$. Если передвинуть тележку так, чтобы расстояние x_1 увеличилось на $\lambda/2$, то в приемник R_1 сигнал будет приходить с отставанием по фазе на π, а в приемник R_2 с опережением на π. Это соответствует полному периоду изменения суммарного сигнала. Определяя число периодов изменения суммарного сигнала при заданном изменении x_1 или x_2, можно найти величину λ.

Но утверждение о том, что при возрастании x_1 на $\lambda/2$ сигнал в R_1 отстает по фазе на π, справедливо лишь в том случае, если мы имеем точечные излучатель T_1 и приемник R_1. На самом же деле излучатель и приемник имеют конечные размеры. Разность хода лучей, исходящих из разных участков рупора T_1 и попадающих на разные участки рупора R_1, неодинакова. Кроме того, при изменении x_1 разности хода изменяются неодинаково. В точных экспериментах, подобных данному, очень важное значение имеет поправка, учитывающая такой *дифракционный* эффект.

В опыте Фрума измерения проводились с разными покрытиями резонаторов и при разных значениях $x_1 + x_2$. В каждом случае величина дифракционного эффекта вычислялась теоретически. Согласие между теорией и экспериментом показывало, что всякий раз поправка вычислялась правильно и введение ее не могло вызывать сомнений. Подобный двухсторонний подход (теоретический и эмпирический) — главное достоинство данного экспериментального метода.

§ 8. Относительные методы

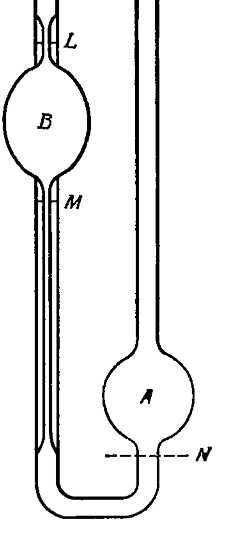
В гл. 2, § 1 мы говорили о том, как при помощи потенциометра измеряют отношение сопротивлений двух резисторов. Это типичный пример *относительного метода*. Величина R_1 измерялась не абсолютно, а в единицах (или относительно) величины R_2. Относительные измерения имеют очень важное значение в физике. Их можно

провести точнее и они проще, нежели абсолютные, и очень часто они дают все, что нужно.

Рассмотрим еще один пример — измерение вязкости жидкости методом, основанным на формуле Пуазейля для течения жидкости по капилляру. Эта формула имеет следующий вид:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{p\pi r^4}{8l\eta}, \tag{3.7}$$

где dV/dt — расход жидкости, p — перепад давления вдоль трубки длиной l, r — внутренний радиус капилляра и η — коэффициент вязкости жидкости. Установив постоянный перепад давления вдоль трубки и измерив его, а также величины dV/dt, l и r, мы сможем вычислить коэффициент вязкости. Такой метод дает абсолютное значение.



Фиг. 53. Вискозиметр Оствальда.

Теперь посмотрим на прибор, изображенный на фиг. 53. Это так называемый вискозиметр Оствальда. В баллон A заливают определенный объем жидкости с плотностью ρ_1 и коэффициентом вязкости η_1, а затем эту жидкость засасывают в баллон B, причем верхний ее уровень устанавливают чуть выше отметки L (слева), а нижний — на отметке N (справа). После этого измеряют время τ_1, за которое уровень жидкости опускается от L до M (обе отметки сделаны очень точно). Затем данную жидкость заменяют другой, плотность которой ρ_2 и коэффициент вязкости η_2. Для этой жидкости также измеряют соответствующее время τ_2. Легко показать, что отношение коэффициентов вязкости дается формулой [1])

$$\frac{\eta_1}{\eta_2}=\frac{\rho_1\tau_1}{\rho_2\tau_2}. \tag{3.8}$$

[1]) В формуле (3.8), так же как и в формуле Пуазейля, из которой она получена, не учитывается, что жидкость приобретает кинетическую энергию. Поэтому необходимо внести соответствующую небольшую поправку [34].

Величины, которые стоят в правой части этого соотношения, сравнительно просто измерить.

Заметим, что при таком относительном методе полностью устраняются две трудные операции, необходимые при абсолютном методе. Первая — поддержание постоянного перепада давления и его измерение, вторая — измерение внутреннего радиуса капилляра, которое следует проводить с высокой степенью точности, ибо в формулу входит величина r в четвертой степени. Кроме того, простота прибора Оствальда легко обеспечивает контроль температуры. А так как температура жидкости сильно сказывается на ее вязкости, это — важное преимущество метода.

Другой пример относительных измерений — определение ускорения силы тяжести g. Измерить абсолютное значение g с высокой точностью очень трудно. Для этой цели пользуются традиционным прибором — оборотным маятником [1]), но при измерениях с таким маятником возможны разнообразные ошибки, и хотя при особом старании большинство из них можно существенно уменьшить, максимально достижимая точность всегда будет ограничиваться нерегулярностью условий в опорной призме. Значительно проще измерять *отношение* величин g для разных точек земного шара. В этом случае просто измеряют период колебаний обычного, а не оборотного маятника, устанавливая его на одной и той же опоре в двух разных точках Земли. Если получены значения g, равные g_1 и g_2, а периоды колебаний маятника равны T_1 и T_2, то

$$\frac{g_1}{g_2}=\frac{T_2^2}{T_1^2}. \tag{3.9}$$

При этом исключаются многие ошибки и в том числе ошибка, связанная с подвесом. Остается в основном ошибка, обусловленная изменениями длины маятника. Благодаря таким измерениям, проведенным очень аккуратно, относительные значения ускорения g уже много лет известны с точностью 10^{-6}, тогда как абсолютная величина g была

[1]) Наиболее точный в настоящее время абсолютный метод основан на измерении времени свободного падения тела [6].

измерена с такой же степенью точности лишь совсем недавно.

В ряде случаев нас интересует не абсолютное, а лишь относительное значение g. Наиболее важные факторы, вызывающие изменение величины g,— это географическая широта и высота над уровнем моря (см. приложение 7). Если учесть эти факторы, то по вариациям величины g на больших расстояниях (из-за изменения высоты поверхности Земли над уровнем моря) можно судить о структуре континентов и океанов. Вариации на небольших расстояниях дают нам сведения о геологической структуре.

Относительными методами измеряют и такие величины, как мощность источника радиоактивного излучения, яркость источника света и плотность потока излучения радиогалактики. Во всех таких случаях проводить абсолютные измерения весьма трудно и поэтому обычно измеряют относительные величины.

Наконец, отметим и то, что, определив абсолютное значение измеряемой величины для *одного* образца или объекта, мы превращаем тем самым все относительные значения в абсолютные. Так, пропустив однажды через вискозиметр Оствальда жидкость с известной вязкостью и плотностью, мы можем измерить абсолютную вязкость любой другой жидкости [1]. А если найдено абсолютное значение g для одной точки Земли, то множество точных относительных величин сразу же станут абсолютными.

§ 9. Зачем нужны точные измерения?

В гл. 1 части I мы уже говорили о том, что точность, которой следует добиваться в эксперименте, зависит от его цели. Это общее правило. Но во многих физических экспериментах, в частности при измерениях фундаментальных величин, нам просто неизвестно, какая точность

[1] Чтобы учесть влияние кинетической энергии, о чем говорилось на стр. 145, нужно взять *две* жидкости с известными коэффициентами вязкости. Но как вы уже поняли, если уловили суть последних глав, лучше всего в данном случае проградуировать прибор по *нескольким* разным жидкостям с известной нам вязкостью.

в конце концов может оказаться достаточной. И мы стараемся добиться максимальной точности, возможной при исследовании известных нам явлений существующими методами. Почему?

Если вы посмотрите статью Коэна и Дю-Монда, озаглавленную «Состояние наших знаний о фундаментальных физических и химических константах на 1965 г.» [4] (что мы весьма рекомендуем вам сделать, ибо в ней прекрасно излагаются и анализируются экспериментальные методы), то вы найдете там сводные данные точнейших измерений таких констант. Вы увидите, что некоторые из них измерены с относительной точностью в одну миллионную и даже лучше. Вы можете спросить, есть ли в этом какой-либо смысл или подобные эксперименты — всего лишь бесполезные упражнения вроде вычисления величины π с сотнями десятичных знаков.

Ответ чрезвычайно прост. Точные измерения преследуют очень важную цель. Они позволяют проверить наши теоретические представления, и когда возникают расхождения, это приводит к новым теориям и открытиям. И в физике и в химии немало тому примеров. Скажем, теория утверждает, что две величины одинаковы. Мы проводим эксперимент и видим, что в пределах его точности так оно и есть. Тогда мы проводим более точный эксперимент и обнаруживаем небольшое различие. Иными словами, теория — это лишь некоторое приближение, а точнейший эксперимент ведет нас к следующему теоретическому шагу. В заключение приведем для примера несколько открытий, которые были сделаны в результате тщательных и точных измерений.

а) До 1894 г. считалось, что, если не говорить о переменных количествах водяного пара и следов двуокиси углерода, водорода и т. д., то атмосферный воздух состоит из кислорода и азота. Но, как показали аккуратнейшие измерения Рэлея, плотность атмосферного газа, который остается после удаления из него кислорода, примерно на полпроцента выше плотности чистого азота, получаемого из аммиака. Это привело Рэлея и Рамсея (1895 г.) [27] к открытию инертного газа аргона, который содержится в атмосфере, как теперь известно, в количестве около 1%.

б) Другой пример — открытие дейтерия. В 1929 г. химическими методами определения атомного веса было установлено, что отношение массы атома водорода к массе атома O^{16} (изотоп кислорода с массовым числом 16) таково:

$$\frac{\text{масса H}}{\text{масса } O^{16}} = \frac{1{,}00799 \pm 0{,}00002}{16}.$$

В 1927 г. Астон измерил это отношение при помощи своего масс-спектрометра и получил, что

$$\frac{\text{масса H}}{\text{масса } O^{16}} = \frac{1{,}00778 \pm 0{,}00005}{16}.$$

Данное расхождение заставило Бёрга и Мензела [1] предположить, что химики измеряют *среднюю* массу атомов естественного водорода, а последний содержит тяжелый изотоп с массой 2 в количестве 1/5000. Тогда расхождение полностью объясняется. (Масс-спектрометрические измерения дают массу только легкого изотопа водорода.) Вскоре это предположение было подтверждено работой [42], авторам которой удалось обнаружить слабые линии в спектре водорода. Длины волн линий точно соответствовали бальмеровской серии водорода с массовым числом 2.

в) На мысль о постоянстве скорости света в пустоте для всех наблюдателей, движущихся равномерно один относительно другого, физиков-теоретиков впервые натолкнули опыты Майкельсона и Морли, проведенные в период 1881—1887 гг. Эти экспериментаторы наблюдали интерференцию света, распространяющегося в двух взаимно перпендикулярных направлениях, и не обнаружили сколько-нибудь значимой разницы в величине скорости света в этих направлениях, в какое бы время дня и года измерения ни проводились. Эти и другие подобные им измерения привели Эйнштейна к созданию специальной теории относительности, одному из величайших открытий физики. Еще до Эйнштейна в теории предполагалось, что разница между этими скоростями очень мала. И необходимы были очень точные измерения, чтобы показать, что если разница и существует, она намного меньше предполагаемой. (Для подробного ознакомления

с опытом Майкельсона — Морли рекомендуем книгу [32] [1].)

Вначале измерения скорости света проводились в видимой области спектра при длине волны около 500 нм. Позже (в ходе второй мировой войны и после нее) были проведены измерения в СВЧ-диапазоне — при длине волны порядка 10 мм, и скорость света оказалась примерно на 17 км$\cdot$с$^{-1}$ больше, чем в оптической области спектра, несмотря на то, что указанная в обоих случаях среднеквадратичная ошибка составляла 1 км$\cdot$с$^{-1}$. Разница не превышала 1/20 000, но тем не менее, если бы расхождение было реальным, это имело бы очень серьезные последствия для современной теории электромагнетизма.

Чтобы решить этот вопрос, вновь понадобились точные измерения. Повторные оптические эксперименты, не подтвердив прежнего значения, дали новый результат, согласующийся с результатами СВЧ-измерений. И в настоящий момент мы имеем следующие величины:

Бергстранд (оптическая область спектра)	299 792,85 $\pm$ 0,16 км$\cdot$с$^{-1}$,
Фрум (СВЧ-диапазон)	299 792,50 $\pm$ 0,10 км$\cdot$с$^{-1}$.

Упражнения

Тщательно разберите следующие эксперименты.

3.1. Очень точная проверка закона Кулона для силы взаимодействия электрических зарядов [25].

3.2. Измерение отношения e/m для электрона [12].

3.3. Измерения скорости света [16].

3.4. Новый эксперимент по определению абсолютного ускорения силы тяжести [6].

3.5. Эквивалентность инерционной и гравитационной масс [31].

3.6. Взвешивание фотонов [26].

3.7. Определение гиромагнитного отношения протона [13].

---

[1]) См. также книгу: *С. И. Вавилов*, Экспериментальные основания теории относительности, М.—Л., 1928.— *Прим. ред.*

ГЛАВА 4

ЭКСПЕРИМЕНТ И ЗДРАВЫЙ СМЫСЛ

В данной главе мы хотим высказать некоторые соображения по поводу проведения экспериментов, основанные на простом здравом смысле. Они относятся ко всем экспериментам — от самых элементарных до самых сложных и изощренных.

§ 1. Предварительный эксперимент

В реальных экспериментах (в противоположность учебным лабораторным работам) почти всегда сначала ставят пробные опыты, которые преследуют сразу несколько целей.

а) Экспериментатор «знакомится» с данным экспериментом. В каждом эксперименте своя методика и связанные с нею определенные, часто повторяющиеся операции, и экспериментатору необходимо поупражняться или попрактиковаться в их выполнении. Первые несколько измерений в эксперименте почти всегда менее надежны или менее ценны, чем последние, и обычно удается сэкономить время, если в начальном периоде работы затратить часть его на то, чтобы найти наилучшие способы проведения измерений и записи результатов.

б) Проверяется работа отдельных элементов установки и аппаратуры.

в) Определяется соответствующий интервал значений для каждой из величин, изменяющихся в данном эксперименте.

г) Оцениваются возможные ошибки в различных величинах. Как мы уже видели, это оказывает непосредственное влияние на стратегию самого эксперимента в том смысле, что больше внимания уделяют измерению

тех величин, ошибка которых вносит основной вклад в ошибку конечного результата.

Пункты «в» и «г» можно рассматривать как выражение той мысли, что всякий серьезный эксперимент следует заранее планировать, а при планировании несколько пробных измерений гораздо полезней, чем сто теорий. Конечно, план должен быть достаточно гибким, и его обычно подправляют в ходе самого эксперимента. Но даже самый примитивный план всегда лучше, нежели проводить одно измерение за другим в зависимости от того, что вдруг пришло нам в голову.

В учебных лабораторных работах возможности проведения предварительных опытов несколько ограничены, и у вас, вероятно, не хватит времени на то, чтобы провести «начерно» весь эксперимент. Тем не менее всегда, кроме разве что случаев простейших экспериментов, следует провести *некоторые* предварительные измерения и составить план с указанием величин, которые необходимо измерить, и (примерно) времени, отводимого на каждое такое измерение.

То же самое относится и к каждому узлу аппаратуры. Прежде чем приступить к систематическим измерениям, убедитесь, что вы знаете, как он работает, т. е. что чем регулируется. Если, например, вы имеете дело со спектрометром, убедитесь — до начала каких-либо измерений — в том, что вы умеете поворачивать призменный столик и зрительную трубу, знаете, какую ручку нужно зажать, чтобы лучше регулировать положение микрометрического винта, какая шкала соответствует тому или иному перемещению и т. п. Если имеется руководство с описанием аппаратуры или инструкция ее изготовителя, прежде всего прочтите их.

Вы можете сказать, что все это очевидно, и это на самом деле так. И тем не менее очень многие не могут взять в толк простых вещей, когда дело доходит до экспериментальной работы.

Сложные методы обработки результатов измерения и устранения незаметных на глаз ошибок — все это прекрасно, но это не может заменить вам простого здравого смысла.

§ 2. Проверка очевидного

Если считается, что установка механически устойчива, проверьте, не качается ли она. Не забывайте, что плоскость определяется тремя точками, не лежащими на одной прямой. Поэтому лучше всего, если у прибора три ножки и их концы образуют равносторонний треугольник. Когда ножек больше трех, прибор, поставленный на плоскую поверхность, шатается, если концы ножек не лежат в одной плоскости.

Если считается, что основание прибора установлено горизонтально, все же взгляните и проверьте хотя бы приблизительно, так ли это. Если потом потребуется выверить установку точнее, то можно всегда воспользоваться спиртовым уровнем.

При проведении оптических экспериментов убедитесь, что все отражающие и преломляющие поверхности выглядят достаточно чистыми. Для недорогостоящей оптики известен прекрасный способ — подышать на поверхность и быстро ее протереть. Но *никогда* не протирайте тряпкой или носовым платком дорогостоящие линзы! Они изготавливаются из мягкого стекла и к тому же часто покрыты очень тонким слоем — толщиной около 100 нм — минеральных солей для уменьшения отражающей способности. Такие линзы легко поцарапать. Их никогда не следует касаться пальцами и хранить открытыми. Чаще всего с них достаточно просто смахнуть пыль мягкой кисточкой из верблюжьего волоса или в крайнем случае осторожно протереть специально предназначенной тканью.

Убедитесь в том, что оптические детали, которые должны быть соосными, действительно соосны и линзы расположены примерно под прямым углом к направлению светового пучка. Просто удивительно, как часто приходится наблюдать такую картину: студент мучается с оптической системой, не замечая, что важнейшая ее линза покрыта пленкой жира, стоит на несколько миллиметров выше или ниже, чем нужно, или повернута примерно на 10° относительно нормали.

Если вам трудно поймать изображение, которое требуется, например, при методе Бойса, поймайте сначала изображение своего пальца. Точно так же, не найдя в спек-

трометре изображения при помощи зрительной трубы, уберите ее и попробуйте обнаружить изображение на глаз. После этого снова поставьте трубу.

В опытах по электричеству, когда вам приходится иметь дело с клеммными соединениями проводов, проверьте, хорошо ли последние зачищены,— если необходимо, зачистите их — и убедитесь, что клеммы плотно затянуты. Если требуется спаять два провода, то прежде всего зачистите их концы, а затем покрепче соедините их механически. Посмотрите, полностью ли пропаяно все соединение. Когда место пайки остынет, слегка подергайте за каждый из проводов, чтобы убедиться в том, что припой пристал к металлу и что у вас не получился просто механический контакт.

Если вы пользуетесь гальванометром или другим аналогичным прибором с переключателем чувствительности, то сначала всегда ставьте переключатель в положение, соответствующее наименьшей чувствительности.

Когда вы собираете электросхему, которая питается от сети, всегда включайте ее в сеть в самую последнюю очередь, и если вам надо в ней что-то изменить, не полагайтесь на выключенный тумблер сети, а выньте штепсель из сетевой розетки.

§ 3. Субъективные ошибки

Проводя измерения, вы должны рассматривать себя как некий элемент аппаратуры, который также может вносить погрешность. Постарайтесь выяснить, какие ошибки свойственны лично вам. Есть, например, люди, которые, оценивая десятые доли деления по шкале прибора, склонны избегать тех или иных цифр. Вы можете легко себя проверить в этом, хотя это, пожалуй, и не очень важно.

Но что уже более серьезно, так это ошибки, которые можно назвать субъективными. Никто из нас не застрахован от случайных ошибок при списывании показаний прибора или при арифметических подсчетах. Но допустим, что некоторая серия измерений дает результат, который вам кажется завышенным. Вполне может оказаться, что в этом случае вы будете делать ошибок больше обычного,

и, вероятнее всего, таких, которые ведут к снижению результата. Конечно, если вы не знаете заранее, чего ожидать, то вы гарантированы от подобной опасности. Часто бывает так, что ее невозможно избежать, но иногда достаточно просто изменить процедуру измерения.

Допустим, например, что вы измеряете при помощи секундомера время, за которое совершается сто колебаний маятника. Вы записываете:

Начальный отсчет	Конечный отсчет	Время ста колебаний
0′0,2″	1′49,7″	1′49,5″

Но второй отсчет сделан неверно: должно быть 1′39,7″. Вы сбрасываете показания секундомера и повторяете измерение. Стрелка останавливается примерно в том же положении. Вы ожидаете, что она покажет приблизительно 1′49″, и вполне возможно, что вы повторите свою ошибку. И, конечно, ничто не говорит вам об этом — оба результата прекрасно согласуются.

Но допустим, что вы не останавливаете секундомер. После второй сотни колебаний часы показывают 3′19,1″, и это показание вы записываете точно. На вторую серию колебаний затрачено 1′29,4″, т. е. налицо допущенная где-то ошибка, которая сразу бросается в глаза. Заметим, что даже если вы повторите ошибку и запишете 3′29,1″, то после вычитания предыдущего результата обнаружите какое-то расхождение.

Вообще говоря, человек делает меньше ошибок в том случае, когда он чувствует себя комфортабельно — и в прямом, и в переносном смысле слова. Поэтому стоит потратить немного времени на то, чтобы создать соответствующие условия, особенно при длительных измерениях.

а) Аппаратура, требующая регулировки, и ручки управления, которыми часто приходится пользоваться, должны быть удобно расположены.

б) То же самое относится и к приборам, с которых часто приходится снимать показания. Вообще говоря, показания снимать удобнее с вертикальной шкалы, нежели с горизонтальной, а еще лучше, если шкала немного наклонена назад.

в) Необходимо хорошее общее освещение. (В оптических экспериментах, конечно, нужно стараться *устранить* рассеянный свет.)

г) Необходимо обеспечить хорошую вентиляцию. Крайне важно, чтобы в лаборатории был свежий и не слишком теплый воздух.

д) И, наконец, следует подыскать удобное место для ведения записи, желательно подальше от источников воды и тепла.

§ 4. Повторение измерений

Измерение отдельной величины необходимо повторить по крайней мере еще один раз. Такое повторение

а) помогает избежать ошибки при снятии показаний приборов и их записи,

б) дает возможность оценить ошибку измерения.

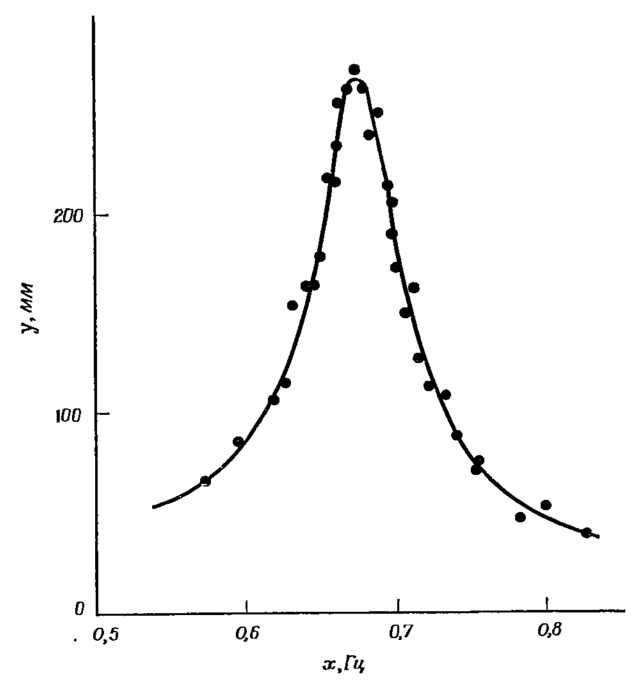
Но если мы проводим серию измерений пары величин x и y, по которым хотим определить, скажем, наклон m наилучшей прямой линии, то нет никакой необходимости измерять несколько раз y при каждом значении x. Как только мы провели такие измерения дважды, т. е. нашли две точки на прямой, мы тут же получили некоторое значение m. Нам нужен еще ряд значений m, но для этого лучше проводить далее измерения при других значениях x, чем повторять при одних и тех же.

Иногда приходится измерять величины x и y, связанные нелинейной зависимостью $y(x)$. Пусть, к примеру, y — амплитуда колебаний простой гармонической системы, на которую действует внешняя периодическая сила с частотой x. На фиг. 54 представлен типичный набор значений x и y вблизи резонанса. В данном случае для более точного определения «наилучшей» кривой нужно, чтобы точки были как можно ближе друг к другу [1]). Но и здесь, как в случае прямой линии, нет необходимости

[1]) Насколько близко должны быть расположены точки, зависит от характера функции и точности измерений. Начинающие настолько привыкают к обычному случаю прямой линии, где достаточно сравнительно небольшого числа точек, что в более сложных случаях, подобных представленному на фиг. 54, они, как правило, набирают недостаточное число точек.

повторять одни и те же измерения. Мерой ошибки служит разброс точек относительно «наилучшей» линии, хотя, конечно, для проверки неплохо повторить несколько раз измерения величины y при одном или двух значениях x.

В вопросе повторения измерений есть одна сторона, которую можно пояснить на одном не столь уж гипо-



Фиг. 54. Амплитуда колебаний простой гармонической системы как функция частоты внешней силы.

тетическом примере. На практических занятиях к преподавателю обращается студент, который встал перед дилеммой. Он измерил угол призмы при помощи спектрометра и получил такие результаты:

$$56°30' \text{ и } 60°12'.$$

Точность измерений он оценивает примерно в 5′ и, проверив выкладки, приходит к выводу, что один из резуль-

татов неверен. (Остановитесь и подумайте, как следовало бы поступить.)

Студент спрашивает преподавателя, какой из двух результатов следует считать правильным. Конечно, это смешно. Ведь цель эксперимента — что-нибудь найти. Студент же так ничего и не нашел, разве только то, что один из его результатов неверный. (А вполне возможно, что неверны оба.) В подобном случае *вы обязаны провести дополнительные измерения.* Измерения следует повторять до тех пор, пока результаты не приобретут какой-то смысл. А до этого с ними нельзя производить никаких, даже простейших действий.

Если следующее измерение дает 56°34′, то можно будет подумать, что неверен, вероятно, второй результат. Нужно еще раз измерить угол призмы, и если он окажется равным 56°35′, то вы можете быть почти уверены, что так оно и есть. Вы можете даже задуматься над тем, как это вы сумели получить угол, равный 60°12′. Но этого, пожалуй, уже никогда не удастся установить. По-видимому, во время измерений была случайно сдвинута призма, или, что более вероятно, была сбита установка зрительной трубы, или просто неверно произведен отсчет. Досадно, когда появляется неверный результат и вы не можете его объяснить, но так бывает, и если это случается редко, то не следует расстраиваться. Беспокоиться придется в том случае, если а) вы произвольно решите, что угол призмы равен 60°, и поэтому примете второй результат или б) решите усреднить первые два результата.

§ 5. Обработка результатов

Кое-что об этом будет сказано в гл. 3 части III, а здесь мы хотели бы сделать лишь общее замечание. Если эксперимент длится больше одного или двух дней, то всегда следует стараться обрабатывать результаты в ходе эксперимента.

Очень плохо, когда проводят все новые и новые измерения, а их результаты обрабатывают лишь в конце эксперимента. Во-первых, вычисления значительно лучше проводить, пока все свежо в вашей памяти. Во-вторых, при обработке части результатов нередко обнаруживается

какое-либо расхождение, которое приводит к необходимости внести те или иные изменения в аппаратуру. Если же это обнаружится не через день после начала измерений, а через месяц, то вы расстроитесь значительно сильнее. Да, кроме того, и сама работа часто ведется так, что одной серией результатов определяется дальнейшее направление эксперимента.

И уж самое глупое, что можно сделать,— это разобрать сложную установку до того, как обработаны результаты (так тоже случается).

§ 6. Конструирование аппаратуры

Принципы и методы конструирования аппаратуры изложены в специальных руководствах. Здесь мы дадим лишь несколько советов общего характера.

а) Делайте все как можно проще.

б) Если установку должен изготовить механик или мастер-приборист в лаборатории, подробно поговорите с ним о назначении установки, прежде чем изготовлять чертежи. Исходя из своего опыта, он может подсказать ряд усовершенствований, ему виднее, как упростить установку и тем самым облегчить ее изготовление.

в) Укажите допуски на размеры и не делайте их меньше, чем это действительно необходимо. Очевидно, что чем жестче допуски, тем труднее изготовление.

г) Некоторые элементы делайте сами. Тогда вы получите представление о том, что можно и чего нельзя сделать. А капля практического опыта...

Часть III

Запись результатов и вычисления

ГЛАВА 1

ЗАПИСЬ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

§ 1. Введение

В каждом эксперименте очень важно сразу же записывать все проделанное.

Запись должна быть ясной и экономной. С одной стороны, вам не хочется тратить потом время, листая страницы, заполненные цифрами без каких-либо указаний, чтобы найти нужную серию данных, или гадая по скупым пометкам, при каких условиях эти данные были получены. С другой стороны, вести запись так, чтобы в ней любой мог легко разобраться,— дело трудоемкое и вряд ли необходимое. Записи должны быть такими, чтобы вы сами были в состоянии без особого труда понять их спустя некоторое время, скажем год.

В этой главе дается ряд рекомендаций по ведению записи. Их не следует рассматривать как свод правил, которых надо слепо придерживаться, а нужно лишь понять их смысл: записи необходимо вести аккуратно, полно, четко и с минимумом затрат.

§ 2. Отдельные листки или рабочая тетрадь?

Одни экспериментаторы предпочитают вести запись в тетради, а другие — на отдельных листах бумаги. Преимущество рабочей тетради в том, что всегда известно: только в ней и надо все искать. Нет разрозненных листков, которые могут затеряться. Главный же недостаток ее в том, что в любом эксперименте, даже не очень

сложном, от одного измерения часто переходят к другому, а затем обратно, и запись каждого из них оказывается разрозненной. Преимущество отдельных листов в том, что записи, посвященные одному и тому же вопросу, всегда можно собрать воедино независимо от других, их разделявших. Кроме того, в практической работе очень удобно пользоваться бумагой разного рода — гладкой, линованной, графической и табличной. (Последняя представляет собой бумагу, разлинованную по вертикали и удобную для составления таблиц.) Такие листы можно собрать в скоросшивателе в любом количестве и любом порядке.

Лучше всего не быть догматиком в данном вопросе и выбирать способ ведения записи в соответствии с конкретным экспериментом. Сочетание рабочей тетради с отдельными листами даст вам преимущества того и другого способа. Но какая бы система записи ни применялась, хорошо иметь по крайней мере одну сброшюрованную тетрадь; в ней всегда найдется место для дополнительных записей — случайных мыслей, отдельных измерений, ссылок на литературу и т. п. Полезно пронумеровать все страницы тетради, а одну иэ них, в начале или в конце, отвести для подробного оглавления.

Лабораторные работы, которые студенты выполняют в качестве упражнений, обычно несложные и не требуют много времени, а поэтому в сочетании рабочей тетради с отдельными листками нет необходимости. Относительно выбора того или другого существуют разные мнения, что же касается пишущего эти строки, то его опыт показывает, что вести запись на отдельных листах бумаги удобнее. При этом можно пользоваться разными видами бумаги и в любом порядке, а студент может, сдав на проверку отчет по предыдущей работе, выполнять следующую.

§ 3. Запись измерений

Все результаты измерений следует записывать *немедленно* и без какой-либо обработки. Из этого правила нет исключений. Не проводите никаких — даже самых простых — арифметических расчетов в уме, прежде чем записать результат измерения. Допустим, например, что

для получения тока в амперах показания амперметра следует делить на 2. Прежде всего запишите показания прибора в делениях шкалы и не делите их предварительно пополам. Почему следует так поступать, ясно: если при делении в уме вы допустите ошибку, то позже исправить ее уже не сможете.

При проведении и записи измерений хорошо проверить то, что вы записали, взглянув еще раз на прибор. Итак: посмотрите, запишите, проверьте.

Записывайте серийный номер прибора или стандартного блока аппаратуры (эталонного сопротивления, например), используемого при измерениях. При отсутствии четко нанесенного серийного номера нанесите его сами. Впоследствии это может пригодиться. Так, если в ходе эксперимента обнаружатся какие-нибудь неувязки и, анализируя их причины, вы заподозрите, что был неисправен какой-то прибор, вам понадобится знать, каким именно прибором вы пользовались.

Все записи необходимо датировать.

§ 4. Избегайте переписывания

У многих студентов очень плохая привычка записывать результаты наблюдений сначала на клочке бумаги или в «черновой» тетради, затем переписывать их в «чистовую» тетрадь, а оригинал уничтожать. Против этого можно выдвинуть три возражения:

а) это приводит к большой потере времени,

б) при переписывании возможны ошибки,

в) почти невозможно избежать отбора.

Последнее обстоятельство особенно важно, и его следует разобрать подробнее. В большинстве экспериментов используются не все данные измерения. Часто мы приходим к заключению, что некоторые из них либо не очень показательны, либо получены в неподходящих условиях, либо просто не имеют отношения к делу. Иными словами, мы отбираем. Все это совершенно правильно, если при отборе мы руководствуемся объективными критериями. *Но все первичные данные измерений надо обязательно сохранять.* В дальнейшем может понадобиться иной отбор. Во всяком случае, все экспериментальные данные должны

быть налицо, чтобы и другие могли судить по ним о правильности произведенного отбора и о характере самих измерений.

Важная задача практического курса физики состоит в том, чтобы научить четкой и эффективной записи, и прежде всего нужно научиться записывать непосредственно измеряемые величины. Сначала подобная запись будет, вероятно, довольно грязной и беспорядочной, и в ней, возможно, будет нелегко разобраться, но пусть это вас не останавливает. Постепенно вы накопите опыт и дело пойдет на лад. И если даже ваша запись не будет выглядеть так красиво, как она выглядела бы после переписывания, не это важно. В записи важна не красота, а ясность.

Ко всему сказанному добавим, что в какой-то мере переписывание весьма целесообразно. Переписывание часто помогает достичь ясности, желательной не только ради нее самой, но и во избежание ошибок при обработке результатов. Нередко случается, что на определенном этапе эксперимента требуется объединить результаты, разбросанные по разным местам. Может понадобиться построить график, провести ряд вычислений или просто взглянуть на числа. Но поскольку мы сохраняем все первоначальные данные, переписывание такого рода может и даже должно сводиться к отбору лишь нужных нам данных и ничего общего не имеет с переписыванием набело всех записей, о котором говорилось ранее.

§ 5. Схемы

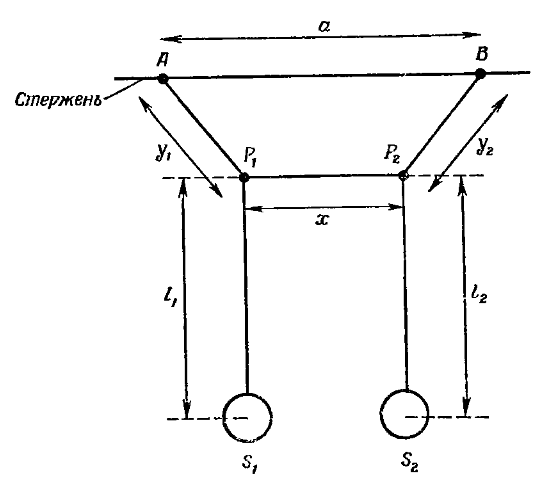
Есть древняя китайская пословица: «Один рисунок лучше тысячи слов».

Важное значение схем в записях эксперимента и в отчетах об эксперименте вряд ли можно переоценить. Дополненная несколькими словами схема часто оказывается самым простым и самым хорошим способом объяснения идеи эксперимента, описания установки и введения обозначений. Для примера мы приведем два разных описания одного и того же элемента установки для исследования колебаний пары связанных маятников.

Описание 1. К горизонтальному стержню в точках A и B привязана нить. К ней в точках P_1 и P_2 прикреплены скользящими узлами еще две нити, на которых подвешены шары S_1 и S_2. Длины участков AB, AP_1, BP_2 и P_1P_2 обозначены через a, y_1, y_2 и x. Расстояние от узла P_1 до центра шара S_1 равно l_1, а расстояние от узла P_2 до центра шара S равно l_2.

Связь между маятниками изменяем, изменяя расстояние x. Для этого узлы P_1 и P_2 перемещаем вдоль нити AP_1P_2B, так чтобы система оставалась симметричной, т. е. всегда $y_1 = y_2$.

Описание 2. Схема установки представлена на фиг. 55. AP_1P_2B — цельный отрезок нити, P_1 и P_2 — скользя-

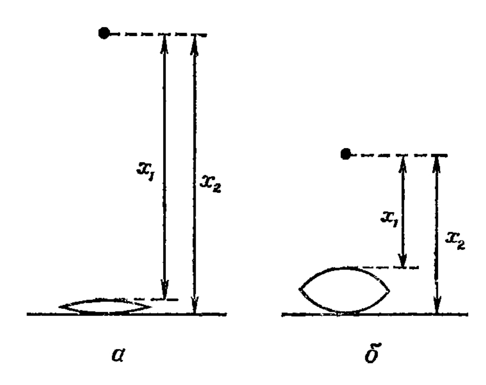


Фиг. 55. Связанные маятники.

щие узлы. Связь изменяем, изменяя x за счет перемещения узлов, причем всегда $y_1 = y_2$. Комментарии к этим описаниям излишни.

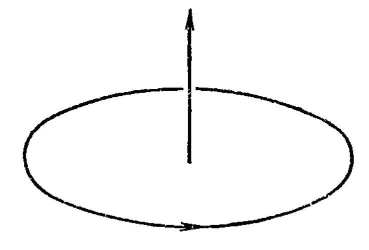
Схема не должна быть художественным или фотографически точным изображением установки. Она должна быть как можно проще, и на ней должно быть указано только то, что имеет отношение к эксперименту. Далее, хотя часто бывает полезно вычертить полную схему установки с приблизительным соблюдением масштаба на дру-

гих схемах следует без всяких колебаний сильно искажать масштаб, если это позволяет четче выявить ту или иную особенность.



Фиг. 56. Схематическое изображение линзы при определении ее фокусного расстояния методом совмещения предмета с изображением.

Приведем простой пример. Предположим, что мы измеряем фокусное расстояние двояковыпуклой линзы. Мы кладем линзу на плоское зеркало и добиваемся совпадения предмета с его изображением. При этом нужно указать, какое расстояние мы измеряем: от нижней или от верхней поверхности линзы. На фиг. 56, *а* представлена схема, выполненная в масштабе, а на фиг. 56, *б* — схема, выполненная не в масштабе, но более ясная и более для нас подходящая. При помощи схемы обычно проще всего объяснить правило выбора знака. На фиг. 57 показано, как принято представлять вращение вектором. Выразить то же самое словами гораздо труднее, и словесное определение менее доходчиво.



Фиг. 57. Схема, поясняющая обычный способ представления вращения вектором.

§ 6. Таблицы

Старайтесь всегда записывать результаты измерений в виде таблиц. Такая запись компактнее и проще для чтения. Значения одной и той же величины лучше всего записывать в вертикальный столбик, ибо глазу легче сопоставлять цифры, расположенные столбиком. В начале каждого столбца напишите название или символ соответствующей величины и укажите единицу измерения.

Для удобства следует придать единице измерения такой десятичный множитель, чтобы записываемые значения были заключены в интервале примерно от 0,1 до 1000. К сожалению, часто пользуются двумя разными способами указания десятичного множителя при единице

Таблица 10

НАЧАЛО ТАБЛИЦЫ, В КОТОРОЙ ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ УКАЗАНЫ ДВУМЯ РАЗНЫМИ СПОСОБАМИ. СЛЕДУЕТ УКАЗЫВАТЬ ИХ ТАК, КАК ЭТО СДЕЛАНО В 1-М СТОЛБЦЕ

Материал	Модуль Юнга, 10^{11} Н·м$^{-2}$	Модуль Юнга × 10^{-11}, Н·м$^{-2}$
Железо	2,11	2,11

измерения. Рассмотрим табл. 10, которая представляет собой лишь начало большой таблицы значений модуля Юнга для разных материалов.

Модуль Юнга для железа равен $2{,}11 \cdot 10^{11}$ Н·м$^{-2}$. В столбце 1 эта величина указана одним способом, а в столбце 2 — другим. Второй способ кажется менее естественным. Кроме того, множитель 10^{-11} иногда относят не к той величине, к которой нужно, и считают, что модуль Юнга равен $2{,}11 \cdot 10^{-11}$ Н·м$^{-2}$. Поэтому мы рекомендуем вам пользоваться первым способом, при котором после физической величины просто ставят запятую и указывают единицу измерения — в данном случае 10^{11} Н·м$^{-2}$. Такая запись понятна и вряд ли может вызвать недоумение. (Заметим, что знак умножения здесь отсутствует.)

Коль скоро единица измерения указана в начале столбца, нет необходимости повторять ее при каждом значе-

нии. Вообще следует избегать ненужных повторений. Это — потеря времени, энергии и загромождение записи. Чем меньше второстепенного, тем легче увидеть главное.

§ 7. Что еще способствует ясности

Схемы и таблицы — это две формы записи, которые позволяют добиться большей ясности. Но следует приветствовать и все иное, что направлено к той же цели. Группы данных измерения разных величин необходимо разделять достаточно большими пробелами и каждой из них давать заголовок. Если серию измерений вы сводите к одному значению, скажем к среднему, то полезно его не только соответственно обозначить, но и подчеркнуть или как-то иначе выделить.

Вообще говоря, при ведении записи не нужно слишком экономить бумагу. Поначалу вы часто будете записывать результаты без их заглавия и указания единиц измерений. Но если вы привыкнете оставлять в верхней части листа несколько пустых строк, то это позволит вам в дальнейшем аккуратно заполнять их необходимыми наименованиями. Если в записях оставляют пустое место для заглавий, то это не обязательно говорит о торопливости, напротив, это даже благоразумно. После того как будет проведено несколько серий измерений, вы сможете дописать значительно более подходящие заглавия, возможно даже более общего характера.

Привычка к исправлениям цифр — враг ясности. Не заставляйте всякого читающего ваши записи, да и себя тоже, по истечении некоторого времени ломать голову над исправленными цифрами. Лучше зачеркнуть неверные цифры и написать рядом правильно.

§ 8. Примеры обычных ошибок — неясность и двусмысленность

Пример 1. Студенту задано измерить вязкость воды при 20° С и сравнить полученное значение с табличным. В его тетради появляется запись:

экспериментальное значение $1.005 \cdot 10^{-3}$ Н·с·м$^{-2}$,
правильное значение $1{,}002 \cdot 10^{-3}$ Н·с·м$^{-2}$.

Какое же из них получено студентом и какое взято из таблиц? Если мы знаем его как скромного человека, то можем догадаться, что «экспериментальным» он назвал полученное им значение, а «правильным» — табличное. У тщеславного же студента могло быть и наоборот. Но, конечно, мы не должны гадать исходя из его характера или чего-либо подобного. Просто студент должен был написать примерно так:

данный эксперимент $1{,}005 \cdot 10^{-3}$ Н·с·м$^{-2}$,

Кэй и Лэби (13-е изд., стр. 37) $1{,}002 \cdot 10^{-3}$ Н·с·м$^{-2}$.

Иные прилагательные, как «фактическое», «официальное», «измеренное», «истинное», здесь тоже были бы неясными, и их следует избегать.

Обратите внимание на то, что мы указали подробные библиографические данные таблиц. Дело в том, что позднее вам может понадобиться проверить выписанное значение или еще раз заглянуть в эти таблицы.

Пример 2. Попробуем разобраться в такой записи:

Амперметр А14, ошибка нуля —0,03А.

Означает ли это, что в отсутствие тока прибор показывает —0,03 А и что для получения правильного результата величину 0,03 следует *прибавлять* ко всем его показаниям, или это означает, что надо *вычитать* 0,03? Вновь остается лишь догадываться.

Мы уже говорили, что результаты измерения следует записывать в их первоначальном виде, без каких-либо вычислений в уме. Согласно этому правилу, экспериментатор обязан снять показание прибора в отсутствие тока и записать его. Таким образом, запись должна была быть примерно следующей:

Амперметр А14,

—0,03 А — показание в отсутствие тока.

Пример 3. В студенческой тетради часто приходится встречаться с записями такого рода:

«Секундомер сравнивался с образцовыми часами и оказался точным в пределах экспериментальной ошибки». Это вызывает возражение отчасти потому, что выражение «точный в пределах экспериментальной ошибки» неясное и разным людям говорит о разном, но главным образом потому, что отсутствуют *данные*, подтверждающие сказанное. Запись должна быть примерно следующей:

Калибровка секундомера С29

	мин	с
Отсчет по секундомеру		
начальный	12	38,4
конечный	27	38,6
	15	00,2±0,3 с (вычислено)
Образцовые часы	15	00,0

Вывод. Ошибка, вносимая секундомером, пренебрежимо мала.

Приведенные нами примеры служат иллюстрацией к следующим положениям:

а) Всякое утверждение должно быть однозначным. Необходимо сознательно задавать себе вопрос, невозможно ли какое-нибудь иное толкование, кроме правильного. Чтобы избежать неправильного толкования, часто проще всего бывает привести один числовой пример.

б) Если утверждение основано на числовых данных, а почти все выводы физических экспериментов основываются на них или должны основываться, то эти данные нужно обязательно привести.

ГЛАВА 2

ГРАФИКИ

§ 1. Для чего нужны графики

В экспериментальной физике графиками пользуются для разных целей. Во-первых, графики строят, чтобы определить некоторые величины,— обычно наклон или отрезок, отсекаемый на оси ординат, прямой, изображающей зависимость между двумя переменными. Хотя в элементарных курсах практической физики упор часто делают именно на это, на самом деле здесь роль графика сравнительно невелика. Ведь при методе наименьших квадратов или методе парных точек (часть I, гл. 3, § 2) наклон прямой определяют, конечно, не по графикам, как таковым, а по исходным числовым данным. Непосредственно же по графику определить наклон можно только в том случае, если провести через точки на глаз наилучшую прямую. Это довольно грубый метод. Его не следует сбрасывать со счета, но он пригоден лишь тогда, когда мы проверяем результат, полученный более точным методом, или когда наклон не очень существен для окончательного результата.

Во-вторых, и это, пожалуй, самое важное, графиками пользуются для наглядности. Допустим, например, что мы измеряем скорость течения воды по трубке как функцию перепада давления с целью определить, когда поток перестает быть ламинарным и становится турбулентным. Полученные нами данные приведены в табл. 11 (они взяты из оригинальной статьи [28]). Пока поток остается ламинарным, скорость его пропорциональна перепаду давления. Глядя на цифры, приведенные в таблице, трудно сказать, где пропорциональность начинает нарушаться. Другое дело, когда те же данные представлены графически (фиг. 58). В этом случае сразу видна точка, в которой нарушается пропорциональность. Графики позволяют также более наглядно проводить сравнение экспериментальных данных с теоретической кривой. Нанося

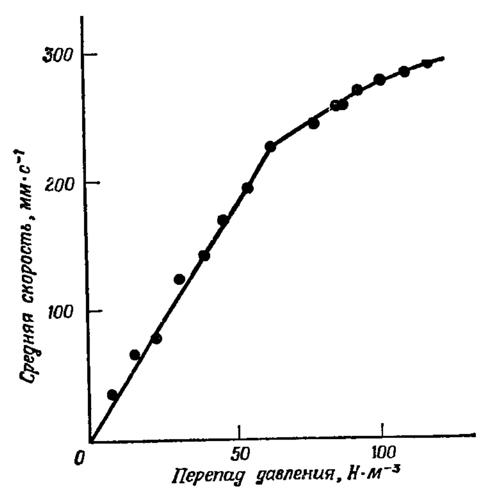
Таблица 11

ТЕЧЕНИЕ ВОДЫ ПО ТРУБКЕ

Перепад давления, Н·м⁻³	Средняя скорость, мм·с⁻¹	Перепад давления, Н·м⁻³	Средняя скорость, мм с⁻¹
7,8	35	78,3	245
15,6	65	86,0	258
23,4	78	87,6	258
31,3	126	93,9	271
39,0	142	101,6	277
46,9	171	109,6	284
54,7	194	118,0	290
62,6	226		

результаты измерений на график, очень удобно следить за тем, как идет эксперимент.

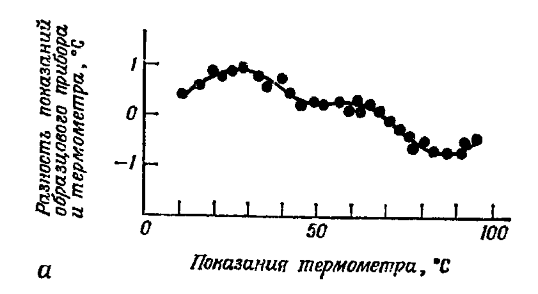
В-третьих, графиками пользуются в экспериментальной работе, чтобы установить эмпирическое соотношение

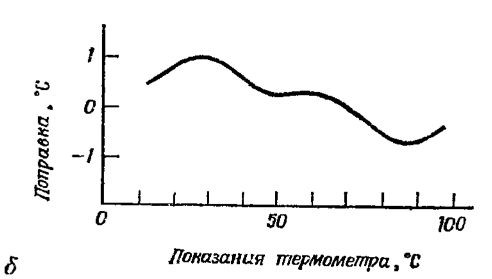


Фиг. 58. Зависимость средней скорости течения воды в трубке от перепада давления (данные из табл. 11).

между двумя величинами. Например, *градуируя* свой термометр по какому-либо образцовому прибору, мы опре-

деляем поправку как функцию показаний термометра (фиг. 59, *а*). На графике через полученные точки проводим плавную или усредненную кривую (фиг. 59, *б*), которой и пользуемся для введения поправки в показания термометра. То же самое можно было бы сделать, составив таблицу поправок. Таблица, вообще говоря, удобнее

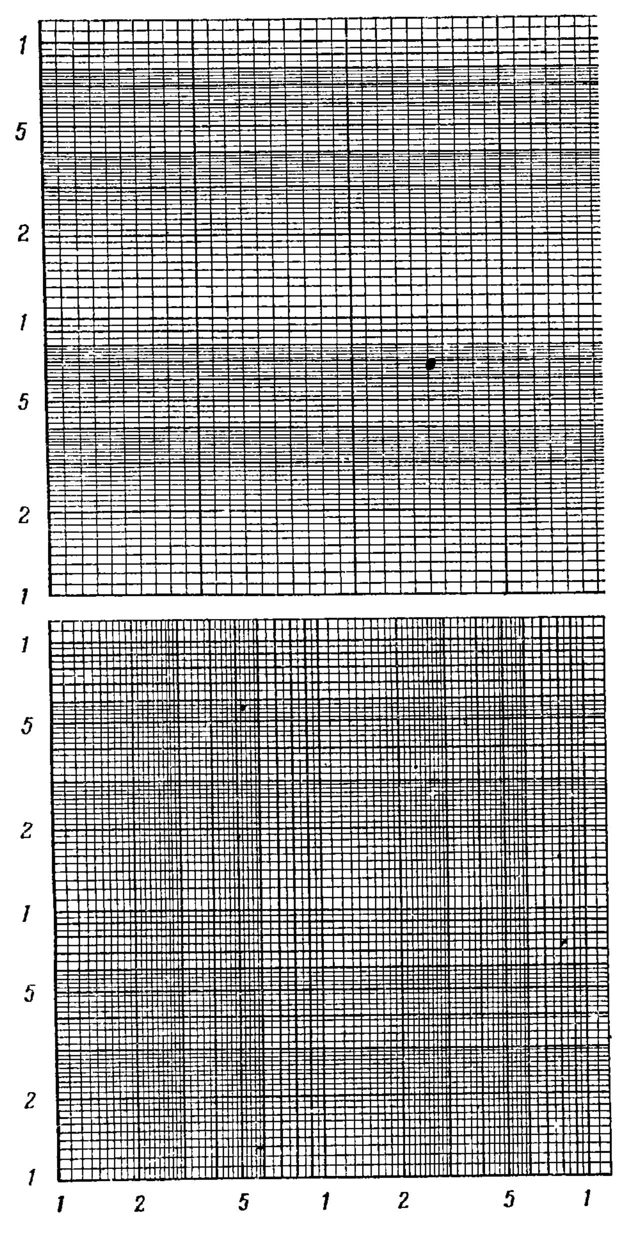




Фиг. 59. *а* — данные градуировки термометра; *б* — кривая поправок.

в работе, чем график, но иногда ее бывает труднее составить.

В физике на графиках принято по горизонтальной оси откладывать независимую переменную, т. е. величину, значения которой задает сам экспериментатор, а по вертикальной оси — ту величину, которую он при этом определяет. Короче говоря, по горизонтали откладывается *причина*, а по вертикали — *следствие*.



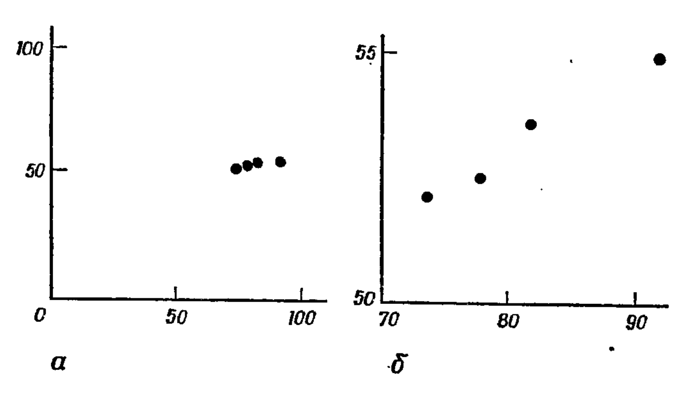
Фиг. 60. Логарифмическая графическая бумага (вверху полулогарифмическая, внизу двойная логарифмическая).

§ 2. Выбор графической бумаги

Существуют различные виды бумаги для графиков, но из них в физике наиболее употребительны два: с обычным линейным масштабом (миллиметровая) и логарифмическая. Последняя бывает двух типов: полулогарифмическая, когда логарифмический масштаб взят только для одной оси координат, и двойная логарифмическая, когда такой масштаб взят для обеих осей (фиг. 60). Полулогарифмическая бумага удобна в том случае, когда связь между переменными логарифмическая или экспоненциальная. Если же эта связь имеет вид $y \sim x^p$, где p — неизвестная величина, то лучше взять двойную логарифмическую бумагу.

§ 3. Масштаб

Допустим, что мы взяли миллиметровую бумагу, размеченную на сантиметры и миллиметры. При выборе масштаба нужно исходить из следующих соображений:



Фиг. 61. *а* — неудачный выбор масштаба для графического представления результатов; *б* — те же данные в увеличенном масштабе.

а) Экспериментальные точки не должны сливаться друг с другом. Из фиг. 61, *а* довольно трудно извлечь полезную информацию. Поэтому лучше выбрать такой масштаб, чтобы расположить точки с разумным интерва-

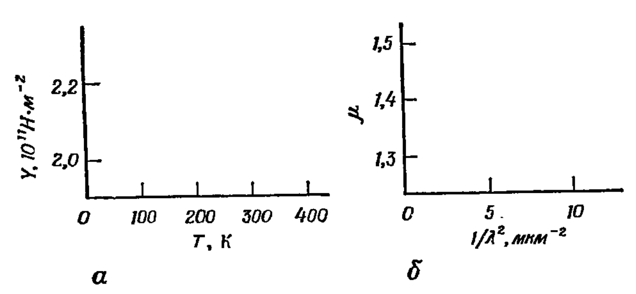
лом, как на фиг. 61, *б*. Но при этом следует иметь в виду два других правила.

б) Масштаб должен быть простым. Проще всего, если единице измеренной величины (или 10; 100; 0,1 единицы и т. д.) соответствует 1 см. Можно также выбрать такой масштаб, чтобы 1 см соответствовал 2 или 5 единицам. Других масштабов следует избегать просто потому, что иначе при нанесении точек на график придется производить арифметические подсчеты в уме.

в) Иногда приходится выбирать масштаб из теоретических соображений. Так, если нас интересует, в какой мере результаты, представленные на фиг. 61, удовлетворяют соотношению $y = mx$, то на нашем графике зависимости y от x обязательно должно быть начало координат. Поэтому график фиг. 61, *б* не годится. (Это вовсе не означает, что надо вернуться к фиг. 61, *а*; см. § 7.)

§ 4. Единицы измерения

Как и в случае таблиц (гл. 1, § 6), десятичный множитель удобнее отнести к единице измерения. Тогда деле-



Фиг. 62. Примеры, показывающие, как делать надписи вдоль осей графика и как указывать единицы измерения.

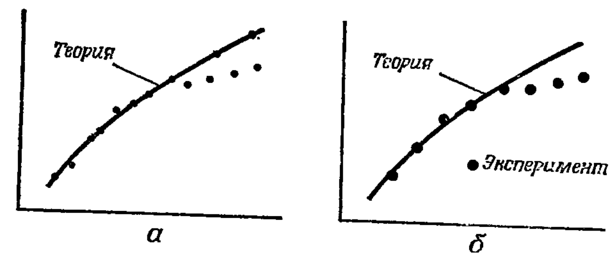
а — зависимость модуля Юнга Y от температуры T; *б* — зависимость показателя преломления стекла μ от величины $1/\lambda^2$, где λ — длина световой волны.

ния на графике можно помечать цифрами 1, 2, 3, . . . или 10, 20, 30, . . ., а не 10 000, 20 000 и т. д. или 0,0001, 0,0002 и т. д.

На осях координат следует указывать название или символ величины (или то и другое). Единицы измерений нужно указывать тем же способом, что и в таблицах, а именно десятичный множитель относить к единице измерения. Некоторые примеры приведены на фиг. 62.

§ 5. Как строить графики

Графики делают в основном для того, чтобы наглядно представить результаты эксперимента, и поэтому они должны быть предельно ясными. Ниже мы дадим ряд



Фиг. 63. *а* — пример неудачного графика, на котором экспериментальные точки очень мелкие и не отличаются от расчетных точек, по которым проведена теоретическая кривая; *б* — расчетные точки не видны, а экспериментальные точки четко выделяются.

общих советов по вычерчиванию графиков. Пользоваться ими нужно с учетом особенностей каждого конкретного случая.

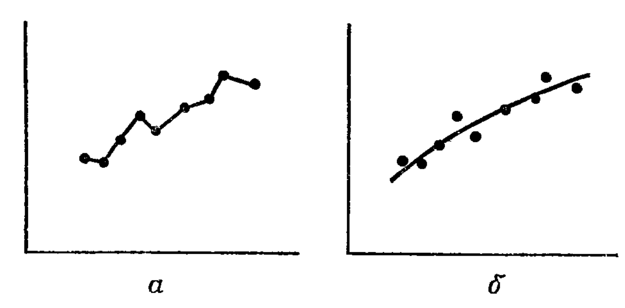
а) Когда на графике для сравнения с экспериментальными данными проводят теоретическую кривую, то точки, по которым ее проводят, выбирают по своему усмотрению. Наносить их надо без нажима, лучше всего карандашом, чтобы при необходимости можно было стереть.

Экспериментальные же данные следует отмечать жирными, хорошо выделяющимися точками (фиг. 63).

б) Полезно иногда через экспериментальные точки проводить «наилучшую» плавную кривую. Обратите внимание на слово *плавную*. Начинающие нередко соединяют экспериментальные точки просто ломаной линией,

как изображено на фиг. 64, *а*. Но тем самым как бы указывается, что соотношение между двумя величинами носит скачкообразный характер, а это, вообще говоря, весьма маловероятно. Скорее следует ожидать, что данное соотношение описывается какой-либо плавной кривой (фиг. 64, *б*).

Если на графике имеется теоретическая кривая, то «плавную» кривую через экспериментальные точки лучше



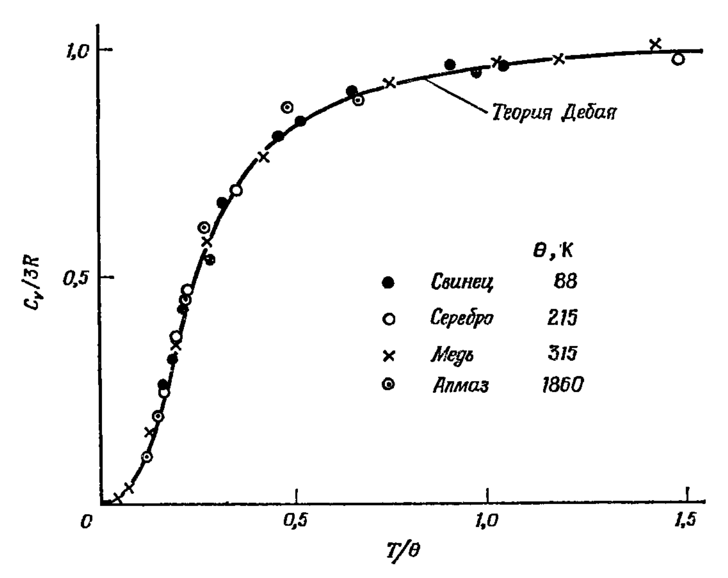
Фиг. 64. Соединять точки ломаной прямой (как на графике *а*) нельзя, ибо это означало бы, что при изменении одной величины другая изменяется резкими скачками, а это маловероятно. При тех же экспериментальных данных более вероятно, что зависимость плавная, подобно кривой на графике *б*.

не проводить. Такая кривая, может быть, не совсем соответствует фактическим данным, и тогда она будет мешать прямому сравнению эксперимента с теорией.

в) Чтобы различать экспериментальные данные, относящиеся к разным условиям или разным веществам, можно пользоваться разными значками, например темными или светлыми кружками, крестиками или точками разного цвета. Но при этом нужно знать меру: если график начинает выглядеть загроможденным, то лучше для каждой группы данных построить отдельный график.

Разные значки удобнее всего, пожалуй, в тех случаях, когда нужно показать, что результаты почти не зависят от условий эксперимента или исследуемого вещества. Примером может служить фиг. 65, где представлена зависимость удельной теплоемкости при постоянном объеме

на киломоль вещества, C_V, от T/θ (T — абсолютная температура, а θ — так называемая дебаевская температура, физическая константа вещества). Согласно теории Дебая, соотношение между C_V и T/θ одинаково для всех твердых



Фиг. 65. Зависимость удельной теплоемкости C_V(в единицах $3R$) от T/θ для свинца, серебра, меди и алмаза.

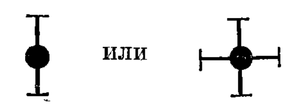
тел. На графике представлены экспериментальные данные для свинца ($\theta = 88$ K), серебра ($\theta = 215$ K), меди ($\theta = 315$ K) и алмаза ($\theta = 1860$ K), а также теоретическая кривая Дебая. Нетрудно видеть, что экспериментальные данные для этих веществ хорошо согласуются с теорией.

Заметим, что по оси y отложена величина $C_V/3R$, где R — газовая постоянная. В физике принято делать ту или иную величину безразмерной, выбирая «естественные» единицы измерения. В данном случае такой единицей служит величина $3R$. Это то значение, которое, согласно классической теории и теории Дебая, должна принимать теплоемкость C_V при высоких температурах ($T \gg \theta$).

г) Размечать деления на осях координат и наносить на график экспериментальные точки лучше всего сначала карандашом. Вдруг вы решите изменить масштаб или окажется, что какая-либо точка случайно поставлена неверно. Если с масштабом и расположением точек все в порядке, то нетрудно обвести все тушью или чернилами и сделать жирные экспериментальные точки. В результате вам удастся избежать переделок и лишних затрат графической бумаги.

§ 6. Как указывать ошибки

Ошибку в экспериментальном значении можно указать следующим образом:

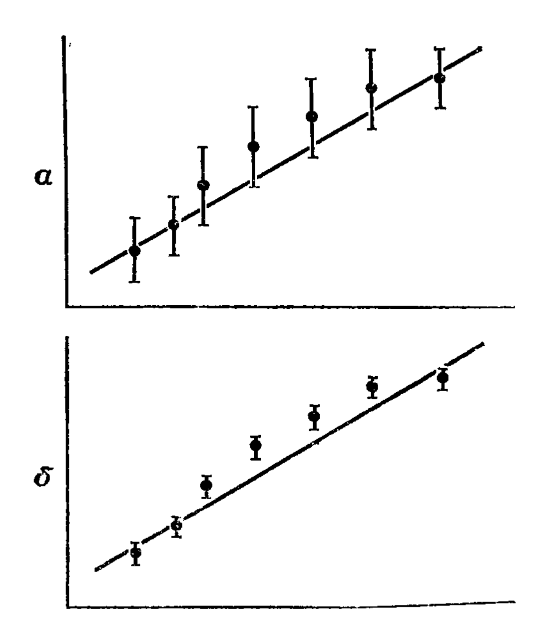


Поскольку нанесение таких значков — дополнительный труд и приводит к усложнению графика, это следует делать лишь в том случае, если информация об ошибках действительно нужна. Так, снабдив соответствующей ошибкой каждую точку на фиг. 54 или 65, мы мало что добавили бы этим.

Иное дело, когда от ошибок может зависеть значимость отклонения экспериментальных данных от теоретической кривой; в этом случае ошибки необходимо указывать. Так, на фиг. 66, *а* отклонение результатов от теории не следует считать значимым, а на фиг. 66, *б* оно значимо. С подобной ситуацией мы уже встречались в части II (гл. 3, § 6), когда разброс экспериментальных данных был больше их ошибок. При этом теоретическая кривая имела вид прямой

$$\text{скорость звука} = \text{const}.$$

График, на котором указаны ошибки (фиг. 50), помогает выявить расхождение.

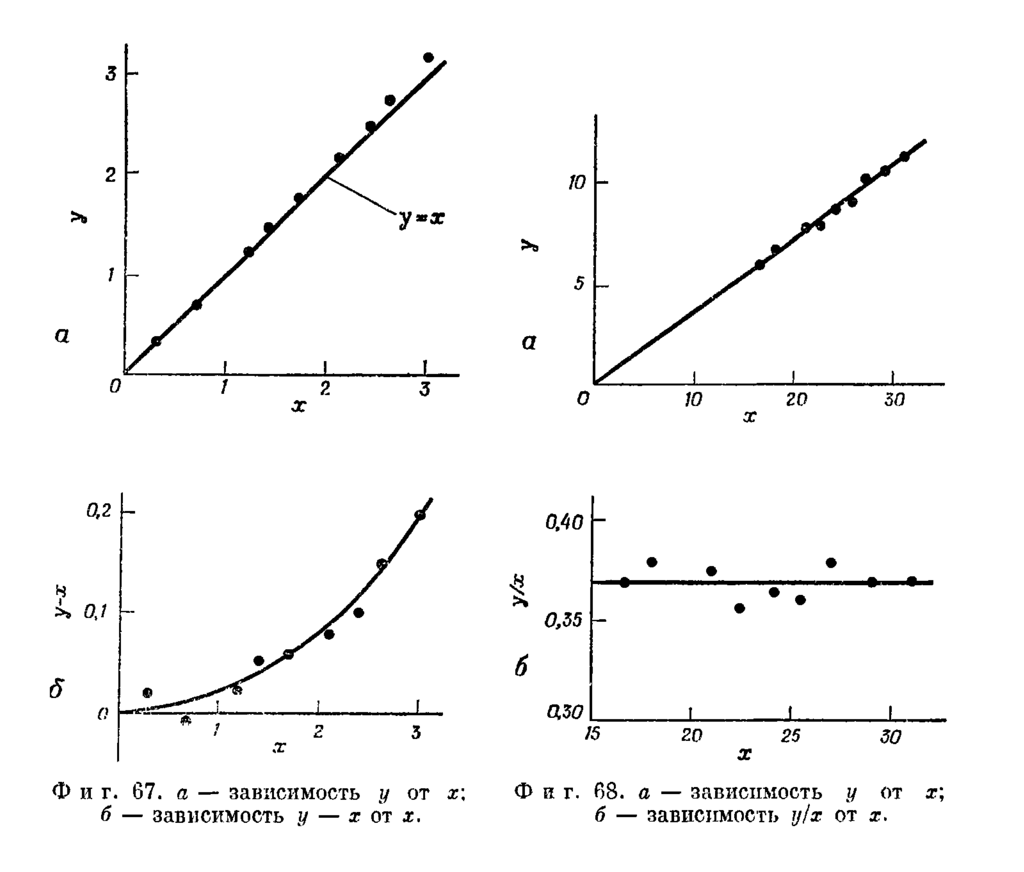


Фиг. 66. Отклонения экспериментальных точек от прямой линии на обоих графиках одинаковы, но в случае *а* отклонение вряд ли значимо, а в случае *б*, по-видимому, значимо.

Ошибки обычно указывают и еще в одном случае — когда они неодинаковы для разных экспериментальных точек.

§ 7. Выбор наиболее показательной зависимости

Допустим, что мы проводим эксперимент, цель которого — проверить справедливость соотношения $y = x$. Полученные нами пары значений x и y показывают, что данное равенство приблизительно выполняется. Чтобы представить результаты графически, мы можем построить график зависимости y от x (фиг. 67, *а*). Но гораздо более показательным был бы график зависимости разности $y - x$ от x, ибо эта разность мала по сравнению с величиной y



Ф и г. 67. a — зависимость y от x; $б$ — зависимость $y - x$ от x.

Ф и г. 68. a — зависимость y от x; $б$ — зависимость y/x от x.

и мы могли бы тогда выбрать более крупный масштаб (фиг. 67, *б*). На первом из графиков отклонения от равенства $y = x$ слабо заметны, а на втором отчетливо видны. Другим примером подобного рода может служить фигура 59, *а*.

Аналогичный метод применим и при проверке соотношения $y = mx$. График зависимости y от x полезен тем, что дает общее представление о ее характере (фиг. 68, *а*). Но более показательным при проверке данного соотношения будет график зависимости y/x от x. В этом случае нам не потребуется, чтобы на графике обязательно было начало координат, как раньше, и мы можем выбрать область изменения величин y/x и y так, как нам удобно (фиг. 68, *б*).

ГЛАВА 3

ВЫЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Важное значение числовых выкладок

Цель эксперимента — получить некоторую числовую величину, и поэтому точность при вычислениях так же важна, как и при измерениях.

У студентов иногда возникает ложное представление, что числовые выкладки — это тривиальное и не очень важное дело. И неспособность к ним даже говорит о наличии математического таланта. Существует и другая точка зрения — что ошибки в расчетах происходят независимо от воли людей. По этому поводу заметим, что, хотя никто не застрахован от ошибок, во-первых, при рациональном подходе к вычислениям можно уменьшить вероятность их появления и, во-вторых, от них есть средство, а именно — *проверка* вычислений. Мы и перейдем к рассмотрению этих двух вопросов.

§ 2. Способы борьбы с арифметическими ошибками

а. Избегайте ненужных выкладок. Чем меньше вы делаете выкладок, тем меньше вероятность ошибиться и тем больше умственной энергии вы сохраните для вычислений, которые действительно необходимы. Мы приведем несколько примеров того, как можно избежать ненужных арифметических расчетов.

I. Вы проводите простой опыт по определению коэффициента жесткости пружины λ, который дается соотношением

$$F = \lambda x, \tag{3.1}$$

где F — сила, приложенная к пружине (в ньютонах), а x — соответствующее удлинение пружины (в метрах). У вас есть набор грузов: 1, 2, 3, . . ., 6 кг, и вы поочередно измеряете удлинение пружины под действием каждого из них. Стоит ли затем переводить вес каждого груза

в ньютоны, умножая его на 9,81? Это было бы довольно глупо, ибо понадобилось бы производить шесть операций умножения и, кроме того, вместо шести целых чисел вы получили бы шесть смешанных.

При вычислении наилучшего значения величины λ следовало бы, конечно, проделать арифметические выкладки с целочисленными значениями F и лишь окончательное значение λ, найденное в единицах кг/м, умножить на 9,81, чтобы выразить его в единицах Н/м.

II. Вы проводите опыт и при помощи секундомера измеряете периоды T_1, T_2 и T_3 трех разных видов колебаний. Величина, которую вам требуется найти, дается выражением

$$Z = aT_1^2 \left(b + c\frac{T_2^2}{T_3^2}\right). \tag{3.2}$$

Точно откалибровав секундомер, вы установили, что 1800 с по образцовым часам с пренебрежимо малой ошибкой соответствуют 1800,8 с по вашему секундомеру. Нужно ли теперь каждое из измеренных значений T_1, T_2 и T_3 умножать на 18000/18008? Это опять было бы крайне неразумно.

Прежде всего вы должны были бы заметить, что величины T_2 и T_3 входят в выражение для Z в виде отношения и поэтому для них подобная поправка вообще не нужна. В величину T_1, разумеется, необходимо ввести поправку, но и то лишь один раз, после того как окончательно найдено наилучшее значение величины T_1, или, что эквивалентно, конечное значение величины Z. Вводить же поправку в каждое измеренное значение T_1 неразумно. Наконец, чтобы ввести поправку в величину Z, не следует умножать ее на $(18000/18008)^2$. Поскольку величина Z пропорциональна T_1^2, ее относительное изменение вдвое больше относительного изменения величины T_1. Поправка же величины T_1 состоит в том, что T_1 уменьшается на 8/18000. Поэтому достаточно уменьшить величину Z на 16/18000.

б. ***Будьте аккуратны.*** Вычисления следует проводить как можно более последовательно и аккуратно. При этом записывайте их так, чтобы было много свободного

места. Неаккуратная и неразборчивая запись выкладок часто оказывается причиной арифметических ошибок.

Почти все, что было сказано о записи измерений, относится и к записи вычислений. Так, при вычислениях обычно удобнее всего сводить числовые данные в таблицы. Очень часто числа одного столбца получаются в результате арифметических действий над числами другого или нескольких других столбцов. В начале каждого такого столбца следует указать вид выполняемого действия. При этом для простоты можно пометить столбцы буквами в алфавитном порядке. Пусть, например, вам нужно вычислить функцию, часто встречающуюся в теории резонанса,

$$y = \frac{1}{Q}\left[(1-x)^2 + \frac{x}{Q^2}\right]^{-1/2} \tag{3.3}$$

при $Q = 22$. Тогда в начале таблицы проще всего было бы написать так:

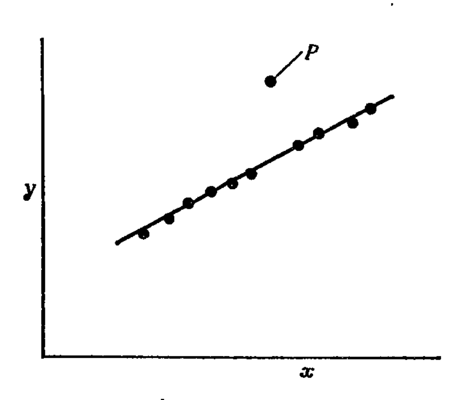
A	B	C	D	E	F
x	$(1-x)^2$	$\frac{x}{484}$	$B+C$	$\frac{1}{\sqrt{D}}$	$y=\frac{F}{22}$

§ 3. Проверка арифметических выкладок

Проверку следует рассматривать как необходимую часть вычислений. Здесь дело обстоит так же, как, скажем, на заводе, выпускающем автомобили. На заводе обязательно должен быть отдел технического контроля для проверки готовых автомобилей. И соответствующие затраты входят в себестоимость машины. Точно так же часть времени и сил приходится тратить на проверку вычислений. Но делать это нужно с таким расчетом, чтобы ваши усилия максимально окупались, т. е. направлять их туда, где это наиболее необходимо. В эксперименте всегда есть такие расчеты, которые важнее других и поэтому требуют более тщательной проверки.

Вычисления можно разбить на две категории — «самопроверяющиеся» и «несамопроверяющиеся». Допустим, например, что мы измеряем две величины и после каких-то арифметических действий получаем пары числовых зна-

чений x_i, y_i. Результаты измерений наносим на график, и они укладываются приблизительно на прямую линию. В этом случае можно обойтись без очень тщательной проверки выкладок для каждой пары значений x_i и y_i, ибо на графике допущенная ошибка очень легко обнаруживается (фиг. 69). Это пример самопроверяющихся вычислений.



Фиг. 69. Тщательно проверять выкладки для каждой точки в данном случае излишне, ибо ошибку легко будет заметить; так, при вычислении координат точки P почти наверняка была допущена ошибка.

Но предположим, что в конце опыта на основании полученных нами данных необходимо вычислить величину

$$Z = \frac{14{,}93 \cdot 9{,}81 \cdot 873}{6{,}85 \cdot (0{,}7156)^2 \cdot \pi^2}. \tag{3.4}$$

В этом случае мы имеем дело с несамопроверяющимися вычислениями. Ничто не может нам указать, правильно ли произведены арифметические действия, разве лишь какая-нибудь особая проверка.

Вообще говоря, чем сильнее ход проверки отличается от хода первоначального расчета, тем лучше. Допустим, что величина Z в выражении (3.4) была вычислена с помощью четырехзначных таблиц логарифмов. Правильность вычислений можно было бы проверить, вновь находя по таблице все величины и производя над ними те же

самые действия. Но при этом велика вероятность, что ошибка повторится,— так уж устроен наш мозг. В данном случае целесообразнее для проверки воспользоваться логарифмической линейкой. Если оба результата согласуются, то почти наверняка оба верны и полученный с помощью таблиц можно выбрать как более точный.

Некоторые могут подумать, что вычислять результат двумя способами — излишняя предосторожность. Но ошибки вычислений — главная причина того, что экспериментатору приходится понапрасну тратить время. Тщательная же проверка в итоге приводит к сбережению времени. Помните, что если в учебной лаборатории кто-то может проверить вашу работу и найти ваши ошибки, то уж потом никто не сделает этого. Вы должны выработать у себя привычку при вычислениях всегда прикидывать результат в уме хотя бы с точностью ~30%. Например, в случае выражения (3.4) следует прикинуть в уме примерно так:

$$\frac{14{,}93}{6{,}85} \approx 2,$$
$$2 \cdot 9{,}81 \cdot 873 \approx 20\,000,$$
$$(0{,}7156)^2 \cdot \pi^2 \approx \frac{1}{2} \cdot 10 = 5.$$

Значит,

$$Z \approx 4000. \tag{3.5}$$

Если при проверке получен результат, не согласующийся с первоначальным, то сначала пересмотрите ход проверочного расчета, ибо он наверняка проводился менее аккуратно. Мне рассказывали, что один новенький аспирант-теоретик как-то принес показать результаты сложных расчетов своему руководителю, известному физику. Проглядев их, руководитель сказал: «Если взять следующий частный случай, то ваш результат должен свестись к тому-то и тому-то». Он набросал на обложке две строчки выкладок и сказал: «Видите, не получается. Вы где-то ошиблись». Смущенный аспирант забрал работу и потратил целый месяц, чтобы повторить все заново. Потом он снова пришел к руководителю. «Ну как,— спросил именитый ученый,— нашли ошибку?» — «Да,— ответил тот,— в двух строчках ваших выкладок».

§ 4. Порядок величин

Следите за тем, чтобы все числовые значения были приемлемы по порядку величины. Если, вместо того чтобы поделить на постоянную Планка (в системе единиц СИ), вы умножили на нее, неправильный результат сразу должен броситься вам в глаза.

Конечно, чтобы сказать, приемлемо ли полученное значение, необходимо представлять себе порядок различных физических величин (упражнение 3.1).

§ 5. Вычисление ошибок

В гл. 4 части I мы говорили, что ошибки вычислять следует самое большее с двумя значащими цифрами. В табл. 12 показан простой расчет среднего значения

Таблица 12

ВЫЧИСЛЕНИЕ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ И СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЙ ОШИБКИ

x	Остаток −	Остаток +
789,0	3	
789,7		4
788,6	7	
789,0	3	
789,3		
789,9		6
789,5		2
789,3	13	12

$$\bar{x}=789{,}3$$

$$\sigma_m=\frac{5}{4}\cdot\frac{25}{7}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\approx 2$$

$$x=789{,}3\pm0{,}2$$

и соответствующей среднеквадратичной ошибки. Чтобы найти среднее, нет необходимости складывать все числа и делить сумму на 7. Из данных таблицы явствует, что

оно должно иметь вид числа 789,x. Поэтому нужно сложить последние значащие цифры каждого числа, затем вычесть 10, чтобы учесть отклонение в третьем знаке третьего числа, и поделить сумму на 7:

$$\frac{2{,}0}{7} \approx 0{,}3. \qquad (3.6)$$

Следовательно, среднее равно 789,3.

Далее в таблице приведены остатки — в двух столбцах соответственно их знакам,— для удобства представленные в виде последних значащих цифр исходных чисел. Всегда нужно проверять, одинаковы ли (примерно) суммы положительных и отрицательных остатков, ибо это указывает на правильность вычисления среднего. Согласно формуле Питерса,

$$\sigma_m = \frac{5}{4} \cdot \frac{13+12}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 2. \qquad (3.7)$$

Таким образом, окончательный результат запишем в виде

$$789{,}3 \pm 0{,}2.$$

Вы видите, что весь расчет не выходит за рамки простейших арифметических выкладок, которые можно проделать в уме.

В случае функции вида

$$Z = \frac{AB\ldots}{CD\ldots} \qquad (3.8)$$

относительная ошибка в величине Z должна превышать наибольшую из относительных ошибок измеренных величин A, B, C, . . ., и это всегда необходимо проверять. В то же время она, как правило, не должна ее намного превышать, и это также следует проверять. В случае функции вида

$$Z = A \pm B \pm C \pm \ldots \qquad (3.9)$$

то же самое относится к абсолютным ошибкам.

§ 6. Вычислительные устройства

При вычислениях можно пользоваться:
- электронно-вычислительной машиной,
- настольной счетной машиной,
- счетной линейкой,
- математическими таблицами,
- собственными мозгами.

Все эти средства перечислены в порядке уменьшения их стоимости и увеличения доступности. Выбирайте сами, что больше всего подходит для вашей работы.

Электронно-вычислительные машины — это предмет, выходящий за рамки данной книги, и мы не будем говорить о них ничего, разве лишь укажем на неправильную позицию некоторых ученых, которые действуют по принципу: «если не можешь думать, садись за вычислительную машину».

а. Настольная счетная машина. О счетных машинах подобного рода мы тоже расскажем совсем немного. Они очень удобны для проведения многих операций, в частности длительного суммирования, а также операции типа $\sum x_i y_i$. Правила пользования такими машинами приводятся в прилагаемых к ним инструкциях.

Дадим один полезный совет, как извлекать на машине квадратный корень, ибо далеко не все умеют это делать прямым путем. Допустим, что нам требуется найти величину $\sqrt{y}$ и x_1 — ее приближенное значение. Вычислим отношение y/x_1, а затем величину

$$x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{y}{x_1}\right). \qquad (3.10)$$

Это даст нам величину $\sqrt{y}$ в следующем приближении. Такой процесс быстро сходится.

б. Счетная линейка. Счетная линейка очень удобна, а ее точность (примерно 1/500) вполне достаточна для очень многих вычислений в физике, так что никто в своей работе не должен обходиться без нее. Счетные линейки довольно дешевы; у тех, что подороже, точнее разметка и больше разных шкал. Имеет смысл приобрести

линейку двойного логарифмического типа с экспоненциальными шкалами.

Многие не используют всех возможностей, которые дает счетная линейка. А между тем вполне стоит потратить час или два на изучение того, что можно делать при помощи своей линейки, какие расчеты можно проводить прямым путем. К линейкам часто придаются подробные инструкции по обращению с ними. Указанная выше точность линейки соответствует одной операции умножения или деления. При этом предполагается, что шкалы линейки (длиной 25 см) точно размечены, а числа устанавливаются и показания считываются с необходимой тщательностью. Следует, однако, проделать при помощи линейки несколько вычислений с разным числом операций и сравнить результаты с точными значениями. При этом постарайтесь, чтобы задаваемые числа и результаты операций были распределены более или менее равномерно по всей длине шкал. Тогда вы будете иметь правильное представление о своей собственной точности.

в. Математические таблицы. Существуют четырех-, пяти-, шести- и семизначные математические таблицы. Наиболее употребительны четырехзначные таблицы, но они обеспечивают точность лишь около 1/5000, а это не всегда приемлемо. Четырехзначных и шестизначных таблиц достаточно почти для любых физических расчетов [5] [1]).

§ 7. Отдельные полезные советы

а) Чтобы вычислить отношение a/b, близкое к единице, напишите

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{a-b}{b} \qquad (3.11)$$

и вычисляйте $(a-b)/b$. Чем ближе a/b к единице, тем больше выигрыш в точности. Например,

$$\frac{839{,}892}{840{,}129} \approx 1 - \frac{0{,}237}{840}. \qquad (3.12)$$

---

[1]) Можно порекомендовать также «Таблицы» *Борлоу*, М., 1963, и «Пятизначные математические таблицы» *Б. И. Сегала и К. А. Семендяева*, М., 1962.— *Прим. ред.*

Вычисляя отношение 0,237/840 при помощи счетной линейки, можно получить требуемый результат с относительной точностью 10^{-6}. Такой способ вычисления целесообразен и в тех случаях, когда выгода не столь велика. Так, например,

$$\frac{2163}{1629}=1+\frac{534}{1629}. \tag{3.13}$$

Даже здесь точность увеличивается в 4 раза.

б) Чтобы приближенно вычислить какую-либо функцию, часто вполне достаточно воспользоваться одним или двумя членами ее разложения в ряд. Для некоторых обычно встречающихся функций такие выражения приведены в табл. 13.

Таблица 13

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ $x \ll 1$

Функция	Приближенное выражение	Функция	Приближенное выражение
$(1+x)^{1/2}$	$1+{}^1/_2\,x$	$\cos x$	$1-{}^1/_2\,x^2$
$1/(1+x)$	$1-x$	$\operatorname{tg} x$	x
$(1+x)^a$	$1+ax$	e^x	$1+x$
$\sin x$	x	$\ln(1+x)$	x

§ 8. Проверка алгебраических соотношений

а. О том, правильно ли алгебраическое выражение, можно судить по его размерности. На каждом этапе алгебраических преобразований размерность проверять не стоит, но на выражения вида (l^2+l), где l — длина, нужно сразу обращать внимание, как на неправильные.

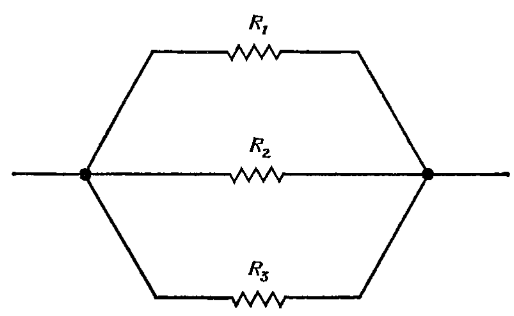
б. В выражениях вида e^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$ величина x должна быть безразмерной. То же самое относится к любой функции, которую можно разложить в ряд по степеням x.

в. Следует проверять, приобретает ли выражение правильный вид в простейших частных случаях,— знаменитый физик, о котором мы говорили выше, в принципе действовал верно.

г. При определенном изменении той или иной переменной в выражении для данной величины последняя должна изменяться в правильном *направлении.* Возьмем, к примеру, формулу Пуазейля

$$\frac{dV}{dt}=\frac{p\pi r^4}{8l\eta}. \tag{3.14}$$

(Определение всех этих величин дано на стр. 145.) Из физических соображений можно сказать, что при увеличении



Фиг. 70. Параллельное соединение резисторов.

p или r и при уменьшении l или η величина dV/dt должна возрастать. Формула (3.14) не противоречит этому.

д. Симметрия. Иногда о правильности формулы можно судить по ее симметрии. Сопротивление соединения, представленного на фиг. 70, равно

$$\frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}. \tag{3.15}$$

Если поменять местами, скажем, R_1 и R_2, то результат не изменится, что, конечно, и следовало ожидать в силу симметрии соединения относительно всех трех сопротивлений. Но допустим, что при выводе формулы допущена ошибка и получено выражение

$$\frac{R_1R_2R_3}{R_1(R_2+R_3)}. \tag{3.16}$$

Мы тотчас должны заметить, что оно неверно, ибо при перестановке величин R_1 и R_2 результат меняется.

е. Совет. Если вам необходимо произвести алгебраические преобразования с величинами, для которых у вас есть числовые значения, сначала выполните эти преобразования и выведите окончательную алгебраическую формулу. Лишь после этого подставляйте в нее числовые значения. Так легче избежать ошибок. Кроме того, подставив числа, вы лишитесь возможности проверить размерности.

Упражнения

3.1. Предлагаемые ниже упражнения имеют целью проверить, насколько вы знаете порядок различных физических величин. Они сформулированы в виде простых задач, поскольку незачем знать, чему равна та или иная физическая величина, если вы не умеете применять знания такого рода. Поэтому сначала попытайтесь решить задачу, не заглядывая в справочники. Те величины, которые вам неизвестны, попробуйте правильно угадать, основываясь на том, что вам известно о связанных с ними величинах.

Когда вы разберете таким образом все задачи, прежде чем заглянуть в ответы, найдите значения всех нужных величин в справочниках [21]. Полистать справочник вам будет полезней, чем просто посмотреть ответ.

а) Длина медного стержня 200 мм, а диаметр равен 40 мм. Если на одном его конце температура равна 0° С, то какое количество тепла необходимо подводить в 1 с ко второму концу, чтобы его температура была равна 25° С?

б) Стальная линейка при 20° С дает правильные показания. Какой будет ошибка при 30° С?

в) Дан медный провод диаметром 1 мм и длиной 1 м. Каково его сопротивление при 0° С, и насколько оно изменится при нагревании до 20° С?

г) Холодный спай хромель-алюмелевой термопары находится при 0° С, а горячий — при 100° С. Какова при этом термо-э. д. с.?

д) По трубке диаметром 1 мм и длиной 250 мм течет вода, причем перепад давлений равен 2000 $Н \cdot м^{-2}$. Какова будет средняя скорость течения при 20° С, при 50° С?

е) Имеется стальной стержень с прямоугольным поперечным сечением 25 × 5 мм и длиной 1 м. Какую силу надо приложить, чтобы растянуть стержень на 0,5 мм?

ж) Какова длина волны звука с частотой 256 Гц в воздухе при 0° С?

з) Какова среднеквадратичная скорость движения молекулы водорода при 25° С?

и) Зная величину g, вычислите G.

к) На дифракционную решетку по нормали к ней падает параллельный пучок монохроматического красного света. Вычислите число линий, приходящихся на 1 мм решетки, если максимум первого порядка наблюдается под углом 30° к нормали. Каким примерно должен быть этот угол для зеленого и фиолетового света?

л) Какое количество энергии излучает в 1 с абсолютно черная сфера радиусом 20 мм при температуре 500 К?

м) Какова скорость и длина волны электрона с энергией 1 кэВ?

н) Какое магнитное поле потребуется для того, чтобы заставить пучок протонов с энергией 1 МэВ двигаться по окружности радиусом 500 мм?

о) Какова максимальная длина волны света, способного ионизовать атом водорода в основном состоянии?

п) Чему равна энергия (в мегаэлектронвольтах), эквивалентная массе, равной единице атомного веса?

3.2. Покажите, что если величина x_1 приблизительно равна величине $\sqrt{y}$ и их относительная разность равна δ, то относительная разность величины $\sqrt{y}$ и величины

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{y}{x_1}\right)$$

равна $^1/_2\delta^2$.

3.3. Вычислите в уме

а) $1{,}00025 \cdot 1{,}00041 \cdot 0{,}99987$,

б) $912{,}64 \cdot \left(\frac{7200{,}0}{7200{,}9}\right)^2$,

в) $(9{,}100)^{1/2}$.

ГЛАВА 4

КАК ПИСАТЬ СТАТЬИ

§ 1. Введение

Важную часть научной работы составляет опубликование идей, теорий и экспериментальных данных. В настоящее время мир захлестывает целый поток научных публикаций, и, коли вы решили так или иначе приобщиться к научной работе, вам наверняка предстоит внести свой вклад в этот поток. Если вы сможете писать свои статьи на высоком уровне, то это будет выгодно и вам, ибо тогда читатели обратят внимание на сказанное вами, и всем остальным, ибо — как это ни странно — всем нравится, когда то, что они читают, написано ясно и интересно, а не путано и скучно.

В данной главе мы остановимся лишь на самых элементарных принципах хорошего научного стиля. Для конкретности мы будем говорить только о статьях, посвященных физическим экспериментам, но многое из того, что нам предстоит здесь сказать, будет относиться и ко всякой другой научной публикации.

§ 2. Заглавие

По заглавию статьи судят о ее содержании. Оно должно быть кратким — не более десятка слов. Следует помнить, что потом заглавие появится в предметном указателе. Составители же указателей и каталогов решают, куда отнести ту или иную статью, полагаясь на слова, содержащиеся в заглавии. Поэтому старайтесь по возможности вводить в заглавие одно или два ключевых слова, которые помогут классифицировать вашу работу.

§ 3. Аннотация

В начале каждой статьи должна быть аннотация объемом около 100 слов, в которой четко говорилось бы о ее содержании.

Аннотация рассчитана на две категории читателей. Тем, кто сам работает в данной области, аннотация позволяет решить, стоит ли читать статью; тем же, кто интересуется подобной тематикой лишь вообще, она служит кратким рефератом — они могут ознакомиться с результатами, не читая всей статьи. Таким образом, в аннотации следует не только указывать предмет исследования, но и приводить окончательные численные результаты и основные выводы.

§ 4. План статьи

Почти все статьи, за исключением очень коротких заметок, распадаются на разделы. Обычно придерживаются такого разделения:

Введение
Методика эксперимента
Результаты эксперимента
Анализ результатов

Некоторые статьи, посвященные экспериментальным исследованиям, содержат также и теоретический материал, который вполне может составить дополнительный раздел, следующий за «Введением» или «Результатами эксперимента».

Хотя действительный план статьи в какой-то степени зависит от ее содержания, рекомендуемый нами план вполне логичен, так что старайтесь придерживаться его, по крайней мере в общих чертах. Рассмотрим все разделы статьи по порядку.

§ 5. Разделы статьи

а. Введение. Введение — очень важная часть статьи. Почти всякий эксперимент — это лишь отдельный участок общего фронта исследования физической проблемы. Во введении должно быть ясно сказано:

I. Чем интересна данная проблема с точки зрения физики.

II. Какое место занимает данный эксперимент в общем исследовании.

III. Как связан данный эксперимент с прежними исследованиями.

Иначе говоря, здесь вы должны ответить на вопрос: «Зачем вы проводили данный эксперимент и какова была его цель?»

Далее в статье можно предполагать, что читатель имеет общее представление о предмете исследования, но во введении нужно исходить из того, что он не знаком с предметом и что введение будет служить для него отправным пунктом. Возможно, вам не захочется в статье возвращаться к истокам исследования. Тогда следует сослаться на другие опубликованные работы, в которых излагаются необходимые предварительные сведения (но ссылок не должно быть слишком много). Введение вместе с этими работами должно так подготовить читателя, чтобы он был в состоянии перейти к основной части статьи.

Мы приведем здесь один блестящий пример. Это введение к статье Дж. Дж. Томсона, посвященной катодным лучам [39], которая явилась фактически сообщением об открытии электрона.

Катодные лучи

> Опыты, о которых говорится в данной статье, я поставил, надеясь добиться некоторой ясности в вопросе о природе катодных лучей. По поводу таких лучей высказываются самые противоречивые суждения; немецкие физики почти единодушны в своем мнении, что они обусловлены неким процессом в эфире, который — в силу того, что в однородном магнитном поле лучи идут не по прямой, а по окружности,— не имеет ничего общего с явлениями, наблюдавшимися ранее; есть и другое мнение: эти лучи не только не совсем эфирные, но, напротив, вполне материальные и обозначают пути частиц материи, заряженных отрицательным электричеством. На первый взгляд, казалось бы, нетрудно провести выбор между столь расходящимися воззрениями, но опыт показывает, что это не так, ибо среди физиков, наиболее глубоко изучивших дан-

ный предмет, можно найти приверженцев обеих теорий.

С точки зрения возможностей исследования теория, связывающая катодные лучи с электрическими частицами, имеет большое преимущество перед эфирной теорией, поскольку она позволяет делать определенные выводы; эфирная же теория не в состоянии предсказать, что будет происходить в тех или иных условиях, поскольку, согласно этой теории, мы имеем дело с прежде не наблюдавшимся явлением в эфире, свойства которого нам неизвестны.

Ниже речь будет идти об опытах по проверке некоторых выводов теории, основанной на представлении об электрических частицах.

Позже мы еще вернемся к этому отрывку. А пока обратите внимание на то, как четко и ясно изложил Томсон те сведения, которые должны содержаться во «Введении»,— первая фраза может служить образцом.

б. Методика эксперимента. В этом разделе дается описание аппаратуры. Насколько подробным будет такое описание, вы должны решить по своему усмотрению, но при этом можете руководствоваться следующими общими принципами.

Если вы пользовались обычной аппаратурой, то, по-видимому, достаточно привести ее наименование и указать соответствующую литературу, где любой заинтересованный читатель мог бы найти подробное описание. Если же аппаратура содержит ряд оригинальных элементов, их следует описать подробнее. Если статья предназначена для журнала, посвященного именно приборам и аппаратуре, например для «Journal of Scientific Instruments» [1]), то уместно привести еще больше подробностей. Но мы будем в дальнейшем иметь в виду иные журналы, где основной упор делается не на аппаратуру, а на результаты эксперимента и их интерпретацию.

В этом разделе можно исходить из того, что читатель в какой-то мере знаком с данным вопросом, но не более. Статья не должна быть рассчитана лишь на тех, кто сам

---

[1]) Или, скажем, для журнала «Приборы и техника эксперимента».— *Прим. ред.*

имеет дело с такой же или аналогичной аппаратурой. Поэтому не следует употреблять слишком специфические выражения, понятные лишь узкому кругу специалистов, и не следует приводить мелкие подробности, интересные только для этого круга.

в. Результаты эксперимента. Вообще говоря, невозможно да и не нужно приводить результаты всех измерений. Они могут лишь запутать читателя и рассеять его внимание. Читатель будет вынужден тратить время на выяснение их относительной важности и извлечение наиболее существенных результатов. Но это ваша работа, которую следует проделать перед тем, как писать статью. Таким образом, необходимо привести только

1) типичные данные основных измерений,

2) важнейшие окончательные результаты.

Обратите внимание на слово «типичные». Приводимые в статье результаты должны давать правильное представление о качестве, точности и воспроизводимости измерений. Поэтому, если у вас пятьдесят серий измерений, не приводите в статье вторую после самой лучшей с пометкой «Типичная серия данных».

г. Анализ результатов. Заголовок этого раздела говорит сам за себя. Подобно «Введению» он является важной частью статьи. Здесь нужно провести:

1) сопоставление с другими аналогичными результатами, если они имеются;

2) сопоставление с соответствующими теориями;

3) анализ состояния исследуемой проблемы в свете полученных вами данных.

Это — вывод, логическое дополнение к тому, что было сказано во «Введении» о цели исследования.

§ 6. Схемы, графики, таблицы

Относительно схем, графиков и таблиц здесь можно повторить почти все, что говорилось об этом в гл. 1 и 2.

Схемы весьма способствуют ясности изложения. Если ваша аппаратура не совершенно стандартна, то почти всегда следует привести ее блок-схему. Результаты очень удобно представлять графически, и это общепринято. Графики должны быть как можно проще; то же

самое относится и к схемам. В книгах и журналах графики и схемы обычно печатают с уменьшением вдвое или втрое. Поэтому, если в оригинале они были вычерчены недостаточно жирными линиями и не очень разборчиво, то в окончательном виде они не будут вызывать к себе доверия и их вообще трудно будет читать.

Результаты удобно представлять также в форме таблиц. Тогда они хорошо выделяются в тексте и читателю легко их найти.

§ 7. Инструкции для авторов

Большинство научных журналов выпускают специальные инструкции для авторов, чтобы они в своих статьях выдерживали общий стиль журнала. С такой инструкцией необходимо ознакомиться до того, как вы перепечатаете статью на машинке в окончательном виде; в противном случае кому-нибудь, а возможно и вам, придется в дальнейшем затратить много времени для приведения статьи в соответствующий порядок.

В инструкциях даются указания относительно формы наименований разделов статьи, сокращений, ссылок на литературу, примечаний, таблиц, схем и графиков. Говорится также, как следует вписывать математические формулы. Это важно, ибо та обычная форма, которую вы придаете математическим выражениям, может оказаться неудобной или невыгодной для набора в типографии. Во многих журналах, например, вместо выражения $\sqrt{a^2 + b^2}$ предпочитают набирать $(a^2 + b^2)^{1/2}$. Если журнал не издает специальной инструкции, следует ознакомиться с одним из его последних номеров.

§ 8. Ясность

Важнейшее требование к научной публикации — это требование ясности. Можно говорить о ясности двоякого рода.

а. Ясность построения. Мы можем сказать, что статья написана ясно, если читателю легко следить за общим ходом изложения, т. е. увидеть лес за деревьями.

Близкие вопросы сгруппированы, и эти группы располагаются в логической последовательности.

Мы весьма рекомендуем вам, прежде чем писать статью, составить ее план. Это как бы костяк статьи, где все мысли, доводы, подробности эксперимента и т. п. выражены одним словом или одной фразой. Когда основные пункты записаны в такой форме, содержание выглядит значительно более четким, а кроме того его удобно изменять, если оно чем-то вас не удовлетворяет. Основные разделы плана должны соответствовать тому, что говорилось в § 4.

б. Ясность изложения. О ясности изложения можно говорить в том случае, если читателю нетрудно правильно понять то, что вы хотели сказать, на каждом отдельном этапе в ходе изложения.

Вспомним отрывок из статьи о катодных лучах. Он кристально ясен благодаря последовательности перехода от одного пункта к другому. Обратите внимание на слова «не только не совсем эфирные, ...» Если их опустить, мы не потеряли бы нити рассуждения, но столь четкое противопоставление здесь полезно. Что бы вы ни писали, всегда старайтесь облегчить читателю понимание, особенно если вы пишете научную статью.

Возможно, вы сочтете приведенный нами пример не очень показательным, ибо автор объясняет здесь нечто простое. Это верно, но такая простота — заслуга самого Томсона. Он выделил важнейшие стороны теорий, объясняющих природу катодных лучей. Сделать же это он смог потому, что *понимал физику*. А это самое главное. Ясно излагает свои мысли тот, кто ясно мыслит. Пока вы не поймете физики, вы не сможете написать ясной и логически последовательной статьи.

§ 9. Хороший язык

Мы переходим к последнему звену в той цепи, которая связывает вас с читателем, а именно к самим словам. Писать статьи хорошим языком — это означает не только соблюдать все правила грамматики, хотя и это очень важно, но и выбирать слова и строить предложения так, чтобы выразить свои мысли как можно короче и как мож-

но приятней для читателя. Ниже мы отметим ряд отдельных моментов.

а) Студентам обычно не советуют употреблять в своих работах местоимение «я», хотя, казалось бы, для этого нет особых оснований. Когда вы говорите о проведенном вами эксперименте, вполне естественно говорить «я». К тому же тогда вы можете применять активную форму глагола, более простую и более прямую, нежели пассивная. Тем не менее нельзя не согласиться с тем, что в наше время лишь немногие статьи, даже из посвященных экспериментам, пишутся от первого лица. Поэтому, если вы склонны следовать общепринятому, избегайте этого. Ну, а если вы все же употребляете такую форму, то в данном вопросе вы оказываетесь заодно с Ньютоном, Фарадеем, Максвеллом и Томсоном, а это неплохое общество.

б) Короткие предложения в общем способствуют ясности, но во избежание монотонности следует вносить разнообразие. Можно ясно построить и длинное предложение — фразы Томсона вы вряд ли сочтете краткими,— но это требует большого мастерства.

в) Разбиение на абзацы помогает читателю следить за ходом изложения. Начинайте каждый раз с новой строки, когда переходите к новому положению или начинаете рассматривать то же самое под другим углом зрения.

г) Избегайте многословных, окольных способов выражения. В следующих примерах следует отдать предпочтение вторым вариантам фраз:

1. Расчеты проводились на основе довольно грубого приближения.
2. Были проведены приближенные расчеты.

1. Аналогичный анализ можно провести и в случае меди с целью проверить, насколько теория в состоянии обеспечить правильную оценку упругих свойств этого металла.
2. Для дальнейшей проверки теории можно тем же способом рассчитать упругие свойства меди.

д) Старайтесь не употреблять подряд много существительных в родительном падеже, например:

«Ниже мы приводим три таблицы результатов наших вычислений ошибок измерения сечения рассеяния атомов

отдачи при рассеянии α-частиц в монокристалле кремния». В этом случае лучше было бы сказать примерно так:

«Мы измерили сечение рассеяния атомов отдачи при рассеянии α-частиц в монокристалле кремния и вычислили ошибки измерения. Результаты вычислений представлены в таблицах 1—3».

е) В научных статьях часто встречается такой недостаток, как несогласованный деепричастный оборот, например: «Измеряя зависимость v от t, было установлено...» [1]).

§ 10. Вывод

Не каждому дано стать большим писателем, но каждый может писать хорошим, ясным языком, если он не прочь потрудиться. Относитесь критически к тому, что пишете. Постоянно спрашивайте себя, логично, ясно, сжато ли вы написали. Если нет, попробуйте снова и снова. Трудно было писать — легко будет читать. Можете дать свою рукопись почитать кому-нибудь другому, чтобы он покритиковал ее; сами читайте и критикуйте других.

Умение хорошо писать не следует отделять от умения хорошо проводить эксперименты. И в том и в другом есть своя прелесть, и не случайно, что такие великие ученые, как Галилей и Ньютон, написали прекрасные научные труды. Но последнее слово здесь пусть скажет не физик, а — великий Сервантес:

«Старайтесь вразумительно выражать свои Мысли и выставлять их в самом правильном свете, работая как можно больше над тем, чтобы не оставить их темными и запутанными, а сделать ясными и понятными».

---

[1]) Читатель, наверно, улыбнется, если мы напомним ему аналогичную фразу из рассказа А. П. Чехова «Жалобная книга»: «Подъезжая к сией станции и глядя на природу в окно, у меня слетела шляпа».— *Прим. ред.*

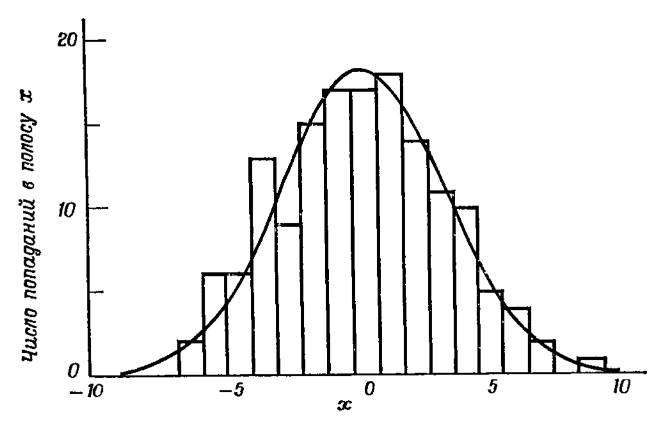
РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

Часть I

2.1. *Опыт с мишенью и стрелами.* Такой опыт, проведенный с 250 студентами, дал следующие результаты:

	Среднее значение	Среднеквадратичное отклонение
ρ	2,4	0,6
ρ/ρ_m	2,32	0,35
σ/ρ	1,275	0,040

Если полученное вами значение ρ/ρ_m существенно отличается от $\sqrt{5}$ (=2,24), то это означает, что пять попаданий в каждой серии распределены не случайным образом, а как-то коррелированы. Слишком большая



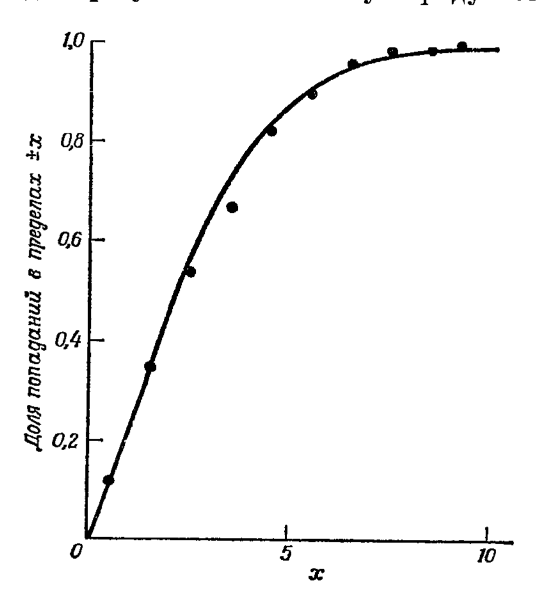
Фиг. 71. Типичная гистограмма 150 результатов в опыте со стрелами и мишенью.

величина этого отношения говорит, вероятно, о том, что в пределах серии вводилась поправка, т. е. если первые две или три стрелы шли влево, то после этого вы направляли стрелы чуть-чуть правее, что приводило к уменьшению величины ρ_m.

Если полученное вами значение σ/ρ существенно отличается от $\sqrt{\pi/2}$ (=1,253), то это означает, что рас-

пределение ваших попаданий — негауссово (это не должно вас сильно смущать). Но, как показывают приведенные выше результаты, у большинства людей получается величина σ/ρ, весьма близкая к 1,25. Так что, если ваше значение оказывается за пределами интервала от 1,15 до 1,40, следует проверить выкладки.

Конечно, даже в том случае, когда результаты опыта со стрелами подчиняются гауссову распределению, вовсе не обязательно, что гауссовым будет и распределение реальных экспериментальных данных. Но, вообще говоря, когда каждый результат соответствует ряду независимо



Ф и г. 72. Опыт со стрелами — зависимость доли попаданий в интервал $\pm x$ от x.

Сплошная линия — теоретическая кривая гауссова распределения при $\sigma = 3{,}26$.

измеряемых величин, полное распределение обычно оказывается гауссовым.

На фиг. 71 представлена типичная гистограмма для 150 попаданий, а также кривая гауссова распределения при $\sigma = 3{,}26$. Чтобы получить правильную теоретиче-

скую кривую, мы умножили значения функции $f(x)$, приведенные в приложении 1, на величину

$$\frac{N}{\sigma}=\frac{150}{3,26}.$$

На фиг. 72 представлен график, который дает долю результатов, попавшую в интервал $\pm x$. При вычислении координаты x надо помнить, что столбцы от $-n$ до $+n$ включительно соответствуют интервалу $\pm(n+{}^1/_2)$.

2.2. Наилучшее значение — среднее, равное 5,622 Ом.

$$\sigma_m = 0{,}002 \text{ Ом}, \quad \sigma = 0{,}006 \text{ Ом}.$$

Результат следует представить в таком виде:

сопротивление = 5,622 ± 0,002 Ом.

2.3. а) 0,00266; б) 0,00161; в) 0,00036; г) 0,683; д) 0,954; е) 0,997.

Доля отсчетов, заключенная в интервале от x до $x+dx$, равна $f(z)\,dz$, где $f(z)$ — функция (стр. 37), таблица значений которой приведена в приложении 1; $z=x/\sigma$. В случаях «а» — «в»

$$dz=\frac{0{,}1}{15{,}0},$$

и, следовательно, ответ на вопрос «а» будет таким:

$$\frac{0{,}399}{150}=0{,}00266.$$

Ответы на вопросы «г»—«е» получите, взяв значения функции $F(z)$ при $z=1$, 2, 3.

2.4.

Распределение	σ	ρ	σ/ρ
прямоугольное	$a/\sqrt{3}$	$a/2$	1,555
треугольное	$a/\sqrt{6}$	$a/3$	1,225

3.1. В приведенных ниже ответах через $g(A)$ обозначена относительная среднеквадратичная ошибка (в %) величины A, т. е.

$$g(A)=100\,\frac{\Delta A}{A}.$$

а) $g(A)=4$; $g(A^2)=8$, $Z=625$; $\Delta Z=625\cdot\frac{8}{100}=50$;

$Z=625\pm 50$.

б) $2B = 90 \pm 4;$

$\Delta Z = (3^2 + 4^2)^{1/2} = 5;$

$Z = 10 \pm 5.$

в) $g(C) = 1; \quad g(C^2) = 2; \qquad C^2 = 2500 \pm 50;$

$g(D) = 8; \; g(D^{3/2}) = 12; \quad D^{3/2} = 1000 \pm 120.$

Вводим $E = C^2 + D^{3/2} = 3500.$

$\Delta E = (50^2 + 120^2)^{1/2} = 130; \; g(E) = 3{,}7;$

$g(A) = 3; \quad g(B) = 5;$

$g(Z) = (3^2 + 5^2 + 3{,}7^2)^{1/2} = 6{,}9.$

$Z = 350 \pm 24.$

г) $\dfrac{\Delta(\ln B)}{\ln B} = \dfrac{\Delta B/B}{\ln B} = \dfrac{0{,}02}{4{,}61} = \dfrac{0{,}43}{100};$

$g(Z) = (0{,}6^2 + 0{,}43^2)^{1/2} = 0{,}74;$

$Z = 46{,}1 \pm 0{,}3(4).$

д) $g(A) = 4; \; g\left(\dfrac{1}{A}\right) = 4;$

$\dfrac{1}{A} = 0{,}0200 \pm 0{,}0008;$

$Z = 0{,}9800 \pm 0{,}0008.$

3.2. а) Измеренные значения l_x, l_y и l_z взаимно независимы. Из табл. 4 (уравнение II) следует, что среднеквадратичная ошибка в величине объема равна

$$\frac{\sqrt{3}}{100} \approx 0{,}02\%.$$

б) Измеренные значения не взаимно независимы. При повышении температуры относительное удлинение во всех трех измерениях одинаково. Этому случаю соответствует формула (3.9) при $n = 3$. Таким образом, среднеквадратичная ошибка в величине объема равна 0,03%.

На самом деле изменения измеряемых длин могли быть обусловлены не только флуктуациями температуры, но и ошибкой прибора. Поэтому для оценки ошибки в величине объема следовало бы выяснить, каков вклад каждой из указанных ошибок.

3.3. Наклон прямой и соответствующая среднеквадратичная ошибка:

Метод	Наклон, мкм·кг$^{-1}$
Парных точек	$-350,1 \pm 2,0$
Наименьших квадратов	$-349,2 \pm 1,9$

Методом наименьших квадратов вычисления легче проводить, если значения x представить в виде $4W$, где W — в килограммах. Тогда $\bar{x}$ и все значения $(x_i - \bar{x})$ оказываются просто целыми числами.

3.4. Представим каждое значение c в виде

$$c = (299\,790 + x) \pm \Delta x \text{ км}\cdot\text{с}^{-1}.$$

Вес каждого значения обратно пропорционален его среднеквадратичной ошибке.

x	Δx	$w = \frac{1}{(\Delta x)^2}$	wx
3,1	0,3	11	34,1
3,0	0,3	11	33,0
2,85	0,16	39	111,2
2,50	0,10	100	250,0

$$\bar{x} = \frac{\Sigma wx}{\Sigma w} = \frac{423,3}{161} = 2,66.$$

Чтобы вычислить среднеквадратичную ошибку взвешенного среднего, заметим, что вес, равный 100, соответствует ошибке 0,10. Таким образом, вес, равный 161, соответствует ошибке

$$\sqrt{\frac{100}{161}} \cdot 0,10 = 0,08.$$

Следовательно, $c = 299\,792,66 \pm 0,08$ км·с$^{-1}$.

4.1. а) $\rho = \frac{M}{abc}$.

Относительная ошибка в величине ρ, вносимая каждой измеренной величиной, равна относительной ошибке этой величины. Относительная ошибка в величине b, равная 10%, значительно превышает остальные. Поэтому ошибка в величине ρ равна 10%. (Под «ошибкой» здесь и в

дальнейшем мы будем понимать среднеквадратичную ошибку.)

б) $a^2 = 6400 \pm 160$ мм^2,

$b^2 = 100 \pm 20$ мм^2.

Ошибка в величине a^2 намного больше ошибки в величине b^2. Ошибка в величине $a^2 + b^2$ равна 2,5%. Ошибка же в величине M пренебрежимо мала по сравнению с ней. Поэтому ошибка в величине I равна 2,5% и полностью обусловлена ошибкой в величине a.

4.2. Ошибка в величине φ равна 3%. Ошибка в r равна 2%; значит, ошибка в r^4 равна 8%. Ошибка в l пренебрежимо мала. Ошибка в n равна $(3^2 + 8^2)^{1/2} = 8{,}5\%$. Таким образом,

$$n = (8{,}0 \pm 0{,}7)\cdot 10^{10} \text{ Н}\cdot\text{м}^{-2}.$$

Обратите внимание на то, что величину, которая возводится в степень с большим показателем, необходимо измерять довольно точно.

4.3. Подставляя соответствующие величины, получаем

$$A = \frac{T_1^2 + T_2^2}{H} = 8{,}0263 \text{ с}^2\cdot\text{м}^{-1},$$

$$B = \frac{T_1^2 - T_2^2}{h_1 - h_2} = 0{,}0200 \text{ с}^2\cdot\text{м}^{-1},$$

$$Z = \frac{8\pi^2}{g} = A + B = 8{,}0463 \text{ с}^{-2}\cdot\text{м}^{-1}.$$

Вычисление ошибки не представляет трудности. Интересно, что хотя A намного превышает B, ошибка за счет T_1^2 входит в основном через величину B. Последняя содержит $(h_1 + h_2)/2h_1 = {}^5/_7$ ошибки за счет T_1^2. Ошибки за счет h_1 и h_2 пренебрежимо малы. Ошибки в Z, обусловленные ошибками в T_1^2, T_2^2 и H, равны $7\cdot 10^{-4}$, $3\cdot 10^{-4}$ и $3\cdot 10^{-4}$ с$^2\cdot$м$^{-1}$, так что полная ошибка оказывается равной $8\cdot 10^{-4}$ с$^2\cdot$м$^{-1}$. Окончательный результат таков:

$$g = 9{,}8128 \pm 0{,}0010 \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}.$$

4.4. Вычислим μ, взяв следующие три пары значений: 1) A; D; 2) $A + \Delta A$; D; 3) A; $D + \Delta D$. По таблицам синусов находим три значения μ:

$$\frac{0{,}7435}{0{,}5023};\quad \frac{0{,}7445}{0{,}5035};\quad \frac{0{,}7455}{0{,}5023}.$$

Они дают

$$\Delta\mu_A = 0{,}002, \qquad \Delta\mu_D = 0{,}004,$$

т. е.

$$\mu = 1{,}480 \pm 0{,}004.$$

4.5. Имеем

$$L \sim \frac{\nu^2}{Y}.$$

Обозначим относительное увеличение частоты ν и модуля Юнга Y через f_ν и f_Y. Тогда относительное увеличение длины L равно

$$f_L = 2f_\nu - f_Y.$$

Поскольку температура повышается на 10° С, получаем

$$\alpha = \frac{f_L}{10} = (-0{,}500 + 0{,}520)\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-1} = 20\cdot 10^{-6}.$$

Ошибка в величине $2f_\nu$ равна $4\cdot 10^{-5}$, а ошибка в величине f_Y равна $3\cdot 10^{-5}$. Поэтому ошибка в величине f_L равна $5\cdot 10^{-5}$, а ошибка в α равна $5\cdot 10^{-6}$.

Такой метод не годится, ибо, хотя величины f_ν и f_Y измерены с точностью выше 1/100, точность величины α оказывается равной лишь 1/4. Это пример случая II (стр. 63).

Часть II

1.1. а) Пусть интервал между вспышками будет равен

$$T_0 = \frac{1}{\nu_0}.$$

Предположим, что ν немного превышает $m\nu_0$. Тогда за время T_0 предмет сделает m целых оборотов и небольшую долю δ одного оборота. В действительности предмет вращается с частотой

$$\nu = \frac{m+\delta}{T_0} = (m+\delta)\,\nu_0,$$

но наблюдателю кажется, что он вращается с частотой $\nu_{\text{каж}} = \delta/T_0 = \delta\nu_0 = \nu - m\nu_0$. Направление кажущегося

вращения совпадает с направлением действительного вращения.

Если же ν немного меньше, чем $m\nu_0$, то величина δ, а следовательно, и $\nu_{каж}$ становится отрицательной. И нам кажется, что предмет вращается в направлении, противоположном действительному.

Если частота ν в точности равна $m\nu_0$, то вращающийся предмет кажется неподвижным. Это наблюдается иногда и в тех случаях, когда источником света служат лампы дневного света (люминесцентные), в которых изменение яркости, обусловленное синусоидальным изменением сетевого напряжения, значительно заметнее, чем в лампах накаливания. Поэтому в рабочих помещениях, где имеются станки с быстро вращающимися частями, применять для освещения люминесцентные лампы опасно.

б)
$$\nu = m\nu_0 + \nu_{каж},$$
$$m\nu_0 = 500{,}00 \pm 0{,}05 \text{ Гц},$$
$$\nu_{каж} = 0{,}40 \pm 0{,}05 \text{ Гц}.$$

Следовательно, $\nu = 500{,}40 \pm 0{,}07$ Гц.

1.2. В первом случае величину ΔE находят, измерив $E_1^{(20)}$ и $E_1^{(30)}$ — э. д. с. батареи S_1 при 20 и 30° С.

$$\Delta E = E_1^{(20)} - E_1^{(30)}.$$

Величина ΔE равна 370 мкВ. Поскольку ошибка в каждом из значений E_1 равна 10 мкВ, ошибка в величине ΔE равна $10\sqrt{2} = 14$ мкВ, т. е. составляет 4%.

Во втором случае непосредственно измеряют небольшую разность e э. д. с. двух батарей S_1 и S_0. Обозначим э. д. с. батареи S_0 через E_0. Положим

$$e^{(20)} = E_1^{(20)} - E_0,$$
$$e^{(30)} = E_1^{(30)} - E_0.$$

Тогда

$$\Delta E = e^{(20)} - e^{(30)}.$$

Относительная ошибка в каждой из величин e определяется относительной ошибкой в силе тока через миллиамперметр, причем абсолютная ошибка не может быть меньше минимального напряжения, регистрируемого гальвано-

метром. Пусть $e^{(20)} = -10$ мкВ. (Если эта величина мала по сравнению с ΔE, то ее значение не скажется на окончательном выводе.) Тогда

$$e^{(20)} = -10 \pm 0{,}2 \text{ мкВ},$$
$$e^{(30)} = -380 \pm 4 \text{ мкВ},$$
$$\Delta E = 370 \pm 4 \text{ мкВ},$$

т. е. ошибка составляет 1%.

Таким образом, второй метод лучше. Относительное изменение э. д. с. E_1 с температурой мало. Вычитая постоянную величину E_0, почти равную E_1, мы получаем величину e, относительное изменение которой уже оказывается большим. Заметим, что нам не надо знать величину E_0, необходимо лишь, чтобы она была постоянной.

Точные методы электрических измерений хорошо изложены в книге [7] [1]).

1.3. См. книгу [18]. Все вопросы температурных измерений исчерпывающим образом рассматриваются в книге [19].

1.4. См. статью [38].

1.8. Основные вопросы измерения сверхнизких и сверхвысоких температур очень удачно изложены в книге [47].

2.1. Обозначим э. д. с. элементов E и G через V_E и V_G, а соответствующие токи — через I_E и I_G. Тогда

$$I_G S = V_G - V_E,$$
$$(I_G + I_E) R = V_E.$$

Отсюда

$$\frac{S}{R} = \frac{(V_G/V_E) - 1}{1 - [I_E/(I_G + I_E)]} = \frac{v-1}{1-f}.$$

2.2. Обозначим радиус орбиты через R, ее площадь — через A и период обращения — через τ. Вращающийся электрон эквивалентен току

$$I = -\frac{e}{\tau}.$$

[1]) См. также «Курс электрических измерений» под ред. В. Т. Прямкова и А. В. Талицкого, М., 1960.— *Прим. ред.*

Магнитный дипольный момент μ_1 дается выражением

$$\mu_1 = IA = -\frac{e}{\tau}\pi R^2.$$

Скорость $v = 2\pi R/\tau$. Следовательно, орбитальный момент количества движения равен

$$L = mvR = \frac{2\pi m R^2}{\tau}.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{\mu}_1 = -\frac{e}{2m}\mathbf{L}.$$

(Оба вектора $\boldsymbol{\mu}_1$ и $\mathbf{L}$ перпендикулярны плоскости орбиты, а поэтому мы имеем право написать последнее равенство в векторной форме.)

2.3. Обозначим через $v_\perp$ компоненту вектора $\mathbf{v}$, перпендикулярную вектору $\mathbf{B}$ и лежащую в той плоскости, в которой лежат векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{v}$. Проекция траектории электрона на плоскость, перпендикулярную вектору $\mathbf{B}$, представляет собой окружность. Ее радиус обозначим через R. Центростремительная сила равна силе Лоренца. Поэтому

$$\frac{mv_\perp^2}{R} = Bev_\perp$$

и

$$\omega_c = \frac{v_\perp}{R} = \frac{eB}{m}.$$

2.4. Искомое отношение равно

$$e^{2\mu_p B/kT}.$$

Положим

$$x = \frac{2\mu_p B}{kT} = \frac{\hbar\gamma_p B}{kT}.$$

При $B = 10$ мТ и $T = 300$ К получим $x = 6{,}8\cdot 10^{-8}$. Следовательно, искомое отношение равно $1 + (6{,}8\cdot 10^{-8})$.

2.5. Такой прибор хорошо описан в книгах [10, 40]. Там же можно познакомиться с методом простых дробей.

2.6. См. книгу [28]. Метод дублетов, так же как и метод стробоскопа, может служить иллюстрацией к случаю I (стр. 63).

2.7. См. статью [36].

Часть III

13.1. Ниже в ответах мы приводим приближенные значения атомных констант, которые вам полезно было бы запомнить. На самом деле эти константы в настоящее время известны с точностью 10^{-5}.

а) 60 Вт.

Коэффициент теплопроводности меди при 0° С равен 385 Вт·м$^{-1}$·(° С)$^{-1}$. Потерями тепла вдоль стержня пренебречь.

б) Показания занижены на 0,010%. Коэффициент линейного расширения для большинства сортов стали равен $(10 \div 11) \cdot 10^{-6}$.

в) 1) 0,0199 Ом; 2) возрастает на 0,0017 Ом.

Удельное сопротивление меди при 0° С равно $1{,}56 \cdot 10^{-8}$ Ом·м и при повышении температуры на 1° С возрастает на 0,4%.

г) 4,1 мВ.

д) 1) 0,25 м·с$^{-1}$; 2) 0,45 м·с$^{-1}$.

При 20° С вязкость воды равна $1{,}00 \cdot 10^{-3}$ Н·с·м$^{-2}$, а при 50° С она равна $0{,}55 \cdot 10^{-3}$ Н·с·м$^{-2}$.

е) 13 kH.

Модуль Юнга для стали равен $2{,}1 \cdot 10^{11}$ Н·м$^{-2}$.

ж) 1,29 м.

Скорость звука в воздухе при 0° С равна 331 м·с$^{-1}$.

з) 1,9 км·с$^{-1}$.

Этот результат можно получить из равенства

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{3}{2} kT,$$

где m — масса молекулы водорода, равная $2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг (постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж·К$^{-1}$).

и) $G = 6{,}7 \cdot 10^{11}$ Н·м^2·кг$^{-2}$.

Воспользуйтесь соотношением $g = GM/R^2$, где M — масса, а R — радиус Земли. Средняя плотность Земли равна 5500 кг·м$^{-3}$, ее радиус — 6400 км; $g = 9{,}81$ м·с$^{-2}$.

к) Типичные длины волн красного, зеленого и фиолетового света таковы: 700, 550 и 400 нм. При таких значениях получаем 1) 710 линий/м; 2) 23,1°; 3) 16,6°.

л) 18 Вт.

Постоянная Стефана — Больцмана $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт·м$^{-2}$ × × К$^{-4}$.

м) 1) $1{,}9\cdot10^{-7}$ м·с$^{-1}$, 2) 39 пм.

Масса электрона $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.

Заряд электрона $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

Постоянная Планка $h = 6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж·с.

н) 0,29 Т.

Масса протона $m_p = 1{,}67\cdot10^{-27}$ кг.

о) 91 нм.

Это обратная величина постоянной Ридберга $R = 1{,}10\cdot10^{7}$ м$^{-1}$.

п) 931 МэВ.

Масса частицы с единичным атомным весом, выраженная в килограммах, равна $1/N_A$, где $N_A = 6\cdot10^{26}$ — число Авогадро.

Скорость света $c = 3{,}0\cdot10^{8}$ м·с$^{-1}$.

1.2. $x_1 = \sqrt{y}\,(1+\delta)$,

$$x_2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{y}\,(1+\delta) + \frac{y}{\sqrt{y}\,(1+\delta)}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{y}\,(1+\delta+1-\delta+\delta^2-\ldots) = \sqrt{y}\left[1+\frac{1}{2}\delta^2+O(\delta^3)\right].$$

1.3. а) $(1+\delta_1)(1+\delta_2)(1+\delta_3) \approx 1+\delta_1+\delta_2+\delta_3$, если величины δ малы по сравнению с 1. Тогда ответ таков:

$$1+0{,}00025+0{,}00041-0{,}00013=1{,}00053.$$

б) $\dfrac{1}{(1+\delta)^2} \approx 1-2\delta$, если $\delta \ll 1$.

Величина $\delta \approx \dfrac{9}{72\,000}$, так что число 912,64 следует уменьшить на $\dfrac{18}{72\,000} = \dfrac{1}{4000}$ часть, т. е. из него нужно вычесть 0,23.

Ответ: 912,41.

в) $(9{,}100)^{1/2} = 3\cdot\left(1+\frac{1}{90}\right)^{1/2} \approx 3\cdot\left(1+\frac{1}{180}\right) = 3{,}017.$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ГАУССОВО РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-z^2/2};\quad F(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^z e^{-t^2/2}\,dt$$

z	$f(z)$	$F(z)$	z	$f(z)$	$F(z)$
0,0	0,399	0,000	1,4	0,150	0,838
0,1	0,397	0,080	1,5	0,130	0,866
0,2	0,391	0,159	1,6	0,111	0,890
0,3	0,381	0,236	1,7	0,094	0,911
0,4	0,368	0,311	1,8	0,079	0,928
0,5	0,352	0,383	1,9	0,066	0,943
0,6	0,333	0,451	2,0	0,054	0,954
0,7	0,312	0,516	2,2	0,035	0,972
0,8	0,290	0,576	2,4	0,022	0,984
0,9	0,266	0,632	2,6	0,014	0,991
1,0	0,242	0,683	2,8	0,008	0,995
1,1	0,218	0,729	3,0	0,0044	0,9973
1,2	0,194	0,770	3,5	0,0009	0,9995
1,3	0,171	0,806	4,0	0,0001	0,99994

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛОВ, СВЯЗАННЫХ С ГАУССОВЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$

Сначала рассмотрим определенный интеграл. Полагаем

$$U = \int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx = \int\limits_{-a}^{a} e^{-y^2}\,dy, \tag{2.1}$$

так как мы можем обозначить переменную интегрирования любой буквой. Тогда

$$U^2 = \int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx \int\limits_{-a}^{a} e^{-y^2}\,dy. \tag{2.2}$$

Поскольку одно из подынтегральных выражений зависит только от x, а другое — только от y, выражение в правой части равенства равно экспоненте $e^{-(x^2+y^2)}$, проинтегрированной по площади квадрата $ABCD$ (фиг. 73), т. е.

$$U^2 = \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-a}^{a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy. \tag{2.3}$$

Теперь перейдем к полярным координатам r и θ. Элемент площади $dx\,dy$ будет заменен на $r\,dr\,d\theta$, а $e^{-(x^2+y^2)}$ перейдет в e^{-r^2}.

Рассмотрим интеграл от e^{-r^2} по кругу радиусом b;

$$W(b) = \int\limits_{0}^{b}\int\limits_{0}^{2\pi} e^{-r^2} r^2\,dr\,d\theta = \pi\,(1 - e^{-b^2}). \tag{2.4}$$

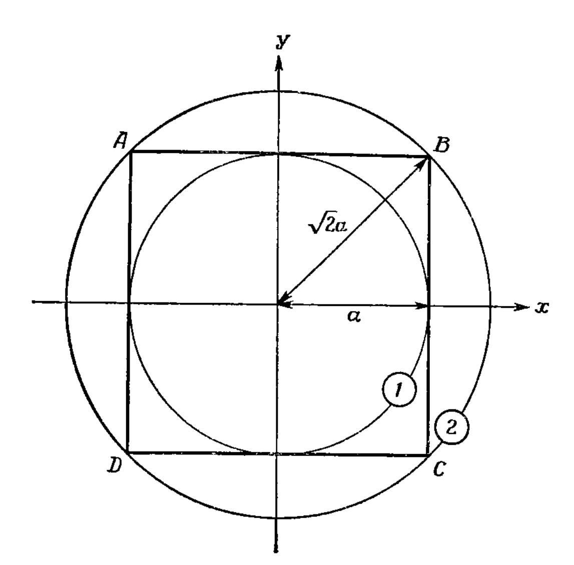
Очевидно, что $U^2 > W(b)$ при $b = a$ (круг *1* на фиг. 73), но $U^2 < W(b)$ при $b = \sqrt{2}\,a$ (круг *2*); таким образом, величина U^2 заключена между

$$\pi\,(1 - e^{-a^2}) \quad \text{и} \quad \pi\,(1 - e^{-2a^2}).$$

Но при $a \to \infty$ обе граничные величины стремятся к π и, следовательно, $U^2 \to \pi$. Итак,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}. \qquad (2.5)$$

2. $I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx.$



Фиг. 73. Схема к вычислению гауссова интеграла.

Этот интеграл сводится к (2.5) заменой переменной

$$y = \frac{x}{\sqrt{2}\sigma}. \qquad (2.6)$$

Мы имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx = \sqrt{2}\,\sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy, \qquad (2.7)$$

$$I_0 = \sqrt{2\pi}\,\sigma. \qquad (2.8)$$

3. $I_1 = \int\limits_0^{\infty} x e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx.$

Непосредственным интегрированием получаем из

$$\int\limits_0^{\infty} x e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx = 2\sigma^2 \int\limits_0^{\infty} y e^{-y^2}\,dy \qquad (2.9)$$

значение

$$I_1 = \sigma^2. \qquad (2.10)$$

4. $I_n = \int\limits^{\infty} x^n e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx,$

где n — положительное целое число или нуль. Нижний предел интегрирования равен $-\infty$ при четных n и равен 0 при нечетных n. Вычислив I_0 и I_1, можно вычислить любой интеграл I_n, полагая σ переменным параметром и дифференцируя подынтегральное выражение:

$$\frac{d}{d\sigma}\int x^n e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx = \frac{1}{\sigma^3}\int x^{n+2} e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx, \qquad (2.11)$$

т. е.

$$I_{n+2} = \sigma^3 \frac{dI_n}{d\sigma}. \qquad (2.12)$$

Тогда при $n \geqslant 1$ имеем

$$I_{2n} = 1;\ 3;\ 5;\ \ldots;\ (2n-1)\sqrt{2\pi}\,\sigma^{2n+1}, \qquad (2.13)$$

$$I_{2n+1} = 2;\ 4;\ 6;\ \ldots;\ 2n\cdot\sigma^{2n+2}. \qquad (2.14)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ДИСПЕРСИЯ ВЕЛИЧИНЫ s^2 ДЛЯ ГАУССОВА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Докажем, что, как говорилось в гл. 2, § 6 части I, в случае гауссова распределения дисперсия величины s^2 равна $2\langle s^2\rangle^2/(n-1)$.

Для набора из n показаний

$$s^2=\frac{1}{n}\sum d_i^2. \qquad (3.1)$$

Ошибка в величине s^2 равна

$$u=s^2-\langle s^2\rangle. \qquad (3.2)$$

Искомой величиной является

$$\langle u^2\rangle=\langle s^4-2s^2\langle s^2\rangle+\langle s^2\rangle^2\rangle=\langle s^4\rangle-\langle s^2\rangle^2. \qquad (3.3)$$

Из равенств (2.9) и (2.17) части I следует, что

$$s^2=\frac{1}{n}\sum e_i^2-\frac{1}{n^2}\left(\sum e_i\right)^2=$$
$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\sum e_i^2-\frac{1}{n^2}\sum_{i}\sum_{\substack{j\\ i\neq j}} e_ie_j. \qquad (3.4)$$

Обе части равенства возведем в квадрат и усредним по всему распределению. Среднее значение любого члена, содержащего нечетную степень e, равно нулю. Следовательно,

$$\langle s^4\rangle=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^2 n\langle e^4\rangle+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^2 n(n-1)\langle e^2\rangle^2+$$
$$+\frac{1}{n^4}2n(n-1)\langle e^2\rangle^2=$$
$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\langle e^4\rangle+\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)\langle e^2\rangle^2\right\}. \qquad (3.5)$$

Величину $\langle e^4 \rangle$ для гауссова распределения можно найти в табл. 2:

$$\langle e^4 \rangle = 3\sigma^4. \tag{3.6}$$

В силу равенств (3.3), (3.5), (3.6), а также равенств (2.12) и (2.19) части I имеем

$$\langle u^2 \rangle = \frac{2}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\sigma^4 = \tag{3.7}$$

$$= \frac{2}{n-1}\langle s^2 \rangle^2. \tag{3.8}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Распределение Пуассона можно считать предельным случаем биномиального распределения, с которого мы и начнем.

1. Биномиальное распределение

а. Вывод. Представим себе, что некое событие может иметь только два исхода A и B. Пусть вероятность исхода A равна p. Тогда вероятность исхода B равна $q = 1 - p$. Если событие происходит N раз, то вероятность $w_N(n)$ того, что исход A за все время повторится n раз, а исход B — $(N - n)$ раз, равна произведению числа способов, которыми можно выбрать n из N предметов, т. е. ${}_NC_n$, на вероятность того, что сначала n раз подряд повторится исход A, а затем $N - n$ раз подряд — исход B. Следовательно,

$$w_N(n) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}\, p^n q^{N-n}. \tag{4.1}$$

Распределение с такой плотностью называется биномиальным распределением. Оно характеризуется двумя параметрами: N и p. На фиг. 74 показано, как выглядит такое распределение при $N = 10$ и $p = {}^1/_3$.

Если просуммировать $w_N(n)$ от $n = 0$ до $n = N$, то мы должны получить единицу. Чтобы проверить это, воспользуемся одним математическим приемом, который пригодится нам и позже. Введем функцию

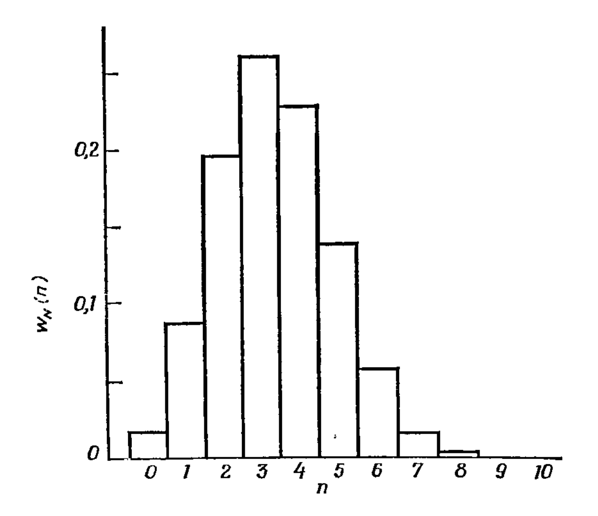
$$g(z) = (q + zp)^N. \tag{4.2}$$

Тогда коэффициент при z^n будет как раз равен $w_N(n)$; итак,

$$g(z) = (q + zp)^N = q^N + zNpq^{N-1} + z^2 \frac{N(N-1)}{2!} p^2 q^{N-2} + \ldots + z^N p^N =$$
$$= w_N(0) + z w_N(1) + z^2 w_N(2) + \ldots + z^N w_N(N). \tag{4.3}$$

Сумму $\sum_{n=0}^{N} w_N(n)$ можно найти из последней строки, положив $z=1$. Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{N} w_N(n) = g(1) = (q+p)^N = 1, \text{ ибо } q+p=1. \tag{4.4}$$



Фиг. 74. Биномиальное распределение при $N = 10$ и $p = 1/3$.

б. Среднее значение числа n. Среднее по распределению значение числа n, согласно формуле (4.3), равно

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{N} n w_N(n) = \left(\frac{dg}{dz}\right)_{z=1} = Np(q+p)^{N-1} = \tag{4.5}$$

$$= Np.$$

Это можно было бы сказать заранее. Если вероятность исхода A при одном событии равна p, то среднее число исходов A при N событиях должно быть равным Np.

в. Среднеквадратичное отклонение. Среднеквадратичное отклонение σ дается выражением

$$\sigma^2 = \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = \langle n^2 - 2n \langle n \rangle + \langle n \rangle^2 \rangle = \\ = \langle n(n-1) \rangle + \langle n \rangle - \langle n \rangle^2. \qquad (4.6)$$

Но мы имеем

$$\langle n(n-1) \rangle = \sum_{n=0}^{N} n(n-1) w_N(n) = \left(\frac{d^2 g}{dz^2} \right)_{z=1} = \\ = N(N-1) p^2 (q+p)^{N-2} = \\ = N(N-1) p^2. \qquad (4.7)$$

Учитывая равенства (4.5)—(4.7), получаем

$$\sigma^2 = N(N-1) p^2 + Np - N^2 p^2 = Np(1-p), \qquad (4.8)$$

или

$$\sigma = \sqrt{Npq}. \qquad (4.9)$$

2. Распределение Пуассона

а. Вывод. Распределение Пуассона — это предельный случай биномиального распределения, когда N стремится к бесконечности, а p стремится к нулю так, что произведение Np остается конечным и постоянным (обозначим его через a). Нам нужно найти вероятность $w_a(n)$ того, что исход A за все время повторится n раз:

$$w_a(n) = \lim_{\substack{N \to \infty \\ p \to 0 \\ Np = a}} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} = \\ = \frac{a^n}{n!} \lim \frac{N(N-1) \ldots (N-n+1)}{N^n} q^{N-n}. \qquad (4.10)$$

При $N \to \infty$ имеем

$$\frac{N(N-1) \ldots (N-n+1)}{N^n} \to 1.$$

(Напомним, что n конечно и, значит, мало по сравнению с N.)

Точно так же

$$q^{N-n}=(1-p)^{N-n}=\left(1-\frac{a}{N}\right)^{N-n}=$$

$$=\frac{\left(1-\frac{a}{N}\right)^{N}}{\left(1-\frac{a}{N}\right)^{n}}. \qquad (4.11)$$

При $N\to\infty$ числитель стремится к e^{-a}, а знаменатель — к 1.

Объединяя все эти результаты, получаем распределение Пуассона

$$w_a(n)=e^{-a}\frac{a^n}{n!}. \qquad (4.12)$$

Обратите внимание на то, что в то время как биномиальное распределение характеризуется двумя параметрами, распределение Пуассона содержит лишь один параметр a. Нетрудно убедиться, что сумма $w_a(n)$ по всем n равна 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_a(n)=e^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}=e^{-a}e^{a}=1. \qquad (4.13)$$

б. Среднее значение числа n и среднеквадратичное отклонение. Мы можем воспользоваться формулами, полученными для среднего значения числа n и среднеквадратичного отклонения в случае биномиального распределения:

$$\langle n\rangle=Np=a, \qquad (4.14)$$

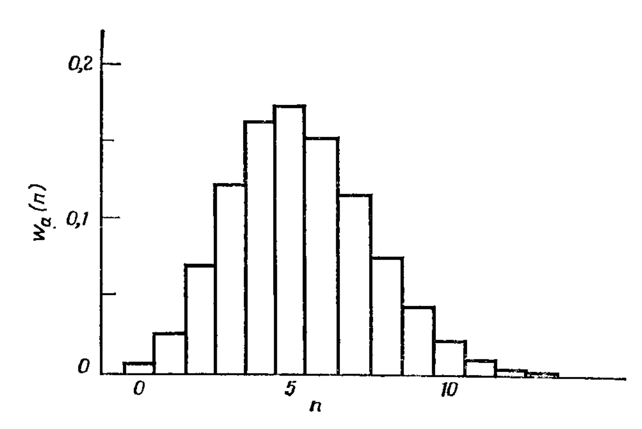
$$\sigma=\sqrt{Npq}=\sqrt{a}, \qquad (4.15)$$

поскольку величина q в пределе равна 1. При возрастании a распределение Пуассона приобретает все более симметричный вид и приближается к гауссову распределению со средним значением a и среднеквадратичным отклонением $\sqrt{a}$.

в. Применение. Распределению Пуассона подчиняются результаты счета частиц при постоянной средней плотности их потока (типичный случай в атомной и ядерной физике). Предположим, что при помощи сцинтилляционного счетчика мы регистрируем электроны и записываем

числа отсчетов за определенные промежутки времени, скажем 10 с. Эти числа и подчиняются распределению Пуассона.

Чтобы показать, почему в данном случае мы имеем дело с распределением Пуассона, мысленно разобьем 10-секундный интервал на N подынтервалов, причем N возьмем очень большим, например 10^8. Допустим, что



Фиг. 75. Распределение Пуассона при $a = 5{,}3$.

среднее число регистрируемых за 10 с электронов $a = 5{,}3$. Тогда вероятность того, что хотя бы один электрон попадет в любой из подынтервалов, равна

$$p = \frac{a}{N} = 5{,}3 \cdot 10^{-8}. \qquad (4.16)$$

Исход A в данном случае — попадание электрона в подынтервал, а исход B — отсутствие электрона. (Вероятность p столь мала, что вероятностью попадания в один подынтервал двух электронов можно пренебречь.)

Вероятность попадания n электронов в 10-секундный интервал дается формулой

$$w_{5,3}(n) = e^{-5,3} \frac{(5{,}3)^n}{n!}. \qquad (4.17)$$

Среднеквадратичное отклонение равно $\sqrt{5{,}3}$. Распределение Пуассона при $a = 5{,}3$ изображено на фиг. 75.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

АППРОКСИМАЦИЯ ПРЯМОЙ ЛИНИЕЙ (СРЕДНЕКВАДРАТИЧНАЯ ОШИБКА ДЛЯ НАКЛОНА И ОТРЕЗКА, ОТСЕКАЕМОГО НА ОСИ ОРДИНАТ)

В § 2 гл. 3 части I мы вычисляли методом наименьших квадратов наилучшие значения величин m и c в уравнении $y = mx + c$ на основании n пар измеренных значений (x_1, y_1), (x_2, y_2), . . ., (x_n, y_n) с одинаковыми весами. Теперь мы выведем выражения для среднеквадратичных ошибок Δm и Δc [формулы (3.31) и (3.32) части I].

Представим себе, что измерения повторяются много раз и мы получаем большое число серий из n пар, причем во всех сериях одни и те же значения x_1, x_2, . . ., x_n. Иными словами, если взять первую пару (x_1, y_1) в каждой серии, то x_1 будет везде одинаковым, а y_1—разным. При этом значения y_1 как-то распределены относительно Y_1 — истинного значения величины y_1 при $x = x_1$ (фиг. 76). То же самое можно сказать и обо всех вторых парах; в каждой серии одно и то же значение x_2, но разные значения y_2, распределенные относительно Y_2 — истинного значения величины y_2 при $x = x_2$. И так далее для всех пар. Поскольку вес всех n пар одинаков, среднеквадратичные ошибки всех n распределений также одинаковы, и мы обозначим их через σ. Предполагается, что внутри каждой серии отсутствует корреляция между ошибками в двух разных величинах y.

Величины x_i, Y_i связаны соотношением

$$Y_i = Mx_i + C. \tag{5.1}$$

Это истинная прямая линия, а M и C — истинные значения наклона и отрезка, отсекаемого на оси ординат.

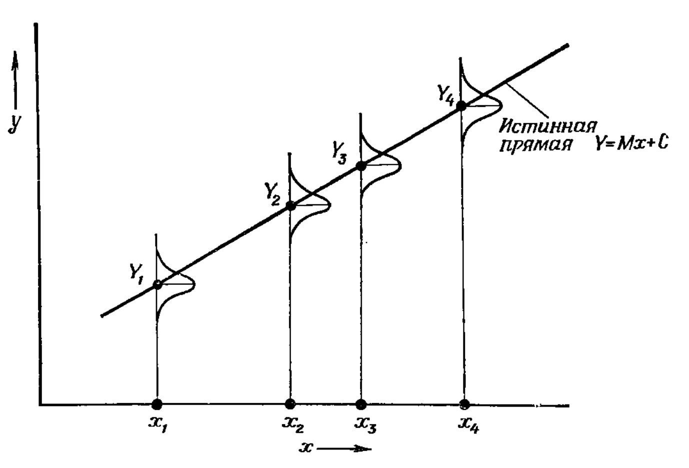
Для каждой серии из n пар (x_i, y_i) можно вычислить m и c по формулам (3.25) и (3.26). Значение m, среднее по всем сериям, равно M, а среднеквадратичная ошибка отдельного значения равна Δm и

$$(\Delta m)^2 = \langle (m - M)^2 \rangle, \tag{5.2}$$

причем здесь вновь производится усреднение по всем сериям. Точно так же усредненное значение величины c равно C, а среднеквадратичная ошибка равна Δc и

$$(\Delta c)^2 = \langle (c - C)^2 \rangle. \tag{5.3}$$

В реальном опыте мы имеем лишь один набор из n значений (x_i, y_i). Величины m и c, соответствующие этому



Фиг. 76. Многократное измерение величины y при фиксированных значениях величины x.

Значения y, полученные при каждом значении x, соответствуют некоторому распределению, симметричному относительно истинного значения Y.

набору, служат наилучшими оценками для M и C. Наша задача — найти приближенные выражения для Δm и Δc.

Необходимые преобразования можно существенно упростить, если произвести замену переменных и перейти от x к

$$\xi = x - \bar{x}, \tag{5.4}$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i. \tag{5.5}$$

Очевидно, что

$$\sum \xi_i = \sum (x_i - \bar{x}) = 0. \tag{5.6}$$

Введем величину

$$D = \sum \xi_i^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2. \tag{5.7}$$

Тогда уравнение прямой

$$y = mx + c \tag{5.8}$$

принимает вид

$$y = m(\xi + \bar{x}) + c = \tag{5.9}$$

$$= m\xi + b, \tag{5.10}$$

где

$$b = m\bar{x} + c. \tag{5.11}$$

Наилучшие значения m и b для данного набора из n пар измеренных значений найдем по формулам (3.25) и (3.26), заменив c на b, а x на ξ. Поскольку $\sum \xi_i = 0$, эти формулы принимают вид

$$m = \frac{1}{D} \sum \xi_i y_i, \qquad b = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i. \tag{5.12}$$

Далее под m и b будем понимать именно эти величины.

Мы видим, что m есть линейная комбинация величин y_i. Для данного набора

$$m = \frac{\xi_1}{D} y_1 + \frac{\xi_2}{D} y_2 + \ldots . \tag{5.13}$$

Коэффициенты при величинах y_i одинаковы для всех серий. Поскольку мы полагаем, что внутри каждой серии нет корреляции между ошибками в двух разных величинах y, можно, пользуясь формулами (3.17) и (3.18), выразить Δm через ошибки в величинах y_i:

$$(\Delta m)^2 = \left(\frac{\xi_1}{D}\right)^2 (\Delta y_1)^2 + \left(\frac{\xi_2}{D}\right)^2 (\Delta y_2)^2 + \ldots . \tag{5.14}$$

Но

$$(\Delta y_1)^2 = (\Delta y_2)^2 = \ldots = \sigma^2. \tag{5.15}$$

Поэтому

$$(\Delta m)^2 = \frac{\sum \xi_i^2}{D^2} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{D}. \tag{5.16}$$

Подобным же образом

$$(\Delta b)^2 = \frac{1}{n} \sigma^2. \tag{5.17}$$

На самом деле нас интересует величина $(\Delta c)^2$, для которой на основании равенства (5.11) получим выражение

$$(\Delta c)^2 = (\Delta b)^2 + \bar{x}^2 (\Delta m)^2 = \tag{5.18}$$

$$= \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{D}\right) \sigma^2 \tag{5.19}$$

(см. замечание в конце приложения).

Величину σ найдем следующим образом. Если истинное значение величины b обозначить через B, то

$$Y_i = M\xi_i + B. \tag{5.20}$$

Суммируя такие уравнения по всем i, получаем выражение для B (ибо $\sum \xi_i = 0$). Точно так же можно вывести выражение для M, если сначала умножить каждое уравнение на ξ_i, а затем просуммировать. Мы получаем

$$M = \frac{1}{D} \sum \xi_i Y_i, \qquad B = \frac{1}{n} \sum Y_i. \tag{5.21}$$

Ошибка i-го значения y равна

$$e^i = y_i - Y_i = y_i - (M\xi_i + B). \tag{5.22}$$

В точке ξ_i наилучшей прямой соответствует значение y, равное $m\xi_i + b$. Поэтому остаток (фиг. 77) дается выражением

$$d_i = y_i - (m\xi_i + b). \tag{5.23}$$

Как и в случае одной переменной, ошибки e_i неизвестны, а известны остатки d_i. Среднеквадратичное значение остатка d_i для n точек, как и прежде, обозначим через s.

В силу соотношений (5.22) и (5.23) имеем

$$d_i = e_i - \{(m - M)\xi_i + (b - B)\}. \tag{5.24}$$

Из (5.12) и (5.21) получаем

$$m - M = \frac{1}{D} \sum \xi_i (y_i - Y_i) = \frac{1}{D} \sum \xi_i e_i, \tag{5.25}$$

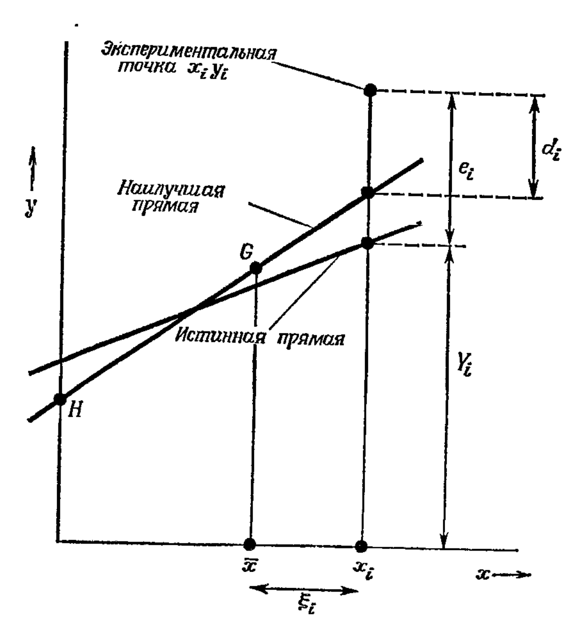
$$b - B = \frac{1}{n} \sum e_i. \tag{5.26}$$

Подставим эти выражения в правую часть равенства (5.24), возведем обе его части в квадрат и просуммируем по i. В итоге

$$\sum d_i^2 = \sum e_i^2 - \frac{1}{D}\left(\sum \xi_i e_i\right)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum e_i\right)^2 \qquad (5.27)$$

(при этом мы вновь воспользовались тем, что $\sum \xi_i = 0$).

Теперь усредним (5.27) по всем сериям, помня, что



Фиг. 77. График, поясняющий значение некоторых величин, фигурирующих в приложении 5.

значения ξ_i фиксированы, а средние значения произведений $e_i e_j$ при $i \neq j$ равны нулю. Усреднение среднего члена правой части предыдущего равенства дает

$$\frac{1}{D}\left\langle \left(\sum \xi_i e_i\right)^2 \right\rangle = \frac{1}{D}\left\langle \sum \xi_i^2 e_i^2 \right\rangle = \sigma^2. \qquad (5.28)$$

Поэтому равенство (5.27) принимает вид

$$n\langle s^2\rangle = n\sigma^2 - \sigma^2 - \sigma^2, \tag{5.29}$$

или

$$\sigma^2 = \frac{n}{n-2}\langle s^2\rangle. \tag{5.30}$$

Наше наилучшее значение величины $\langle s^2\rangle$ равно $\frac{1}{n}\sum d_i^2$. Из (5.16), (5.19) и (5.30) получаем наконец искомые выражения:

$$(\Delta m)^2 \approx \frac{1}{D}\frac{\sum d_i^2}{n-2}, \tag{5.31}$$

$$(\Delta c)^2 \approx \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{D}\right)\frac{\sum d_i^2}{n-2}. \tag{5.32}$$

Нетрудно обобщить их и на случай неодинаковых весов. Если вес i-й точки равен w_i, полагаем дисперсию i-го распределения равной σ^2/w_i, где σ — постоянная. Тогда, рассуждая примерно так же, как и выше, получаем формулы, которые были приведены на стр. 52.

Замечание относительно взаимной зависимости m, c и b

В соотношении (5.18) предполагается, что величины m и b независимы, и это нетрудно доказать, вычислив произведение $(m - M)(b - B)$ с учетом выражений (5.12) и (5.21). Среднее значение этого произведения будет равно нулю. Но на самом деле m и c не независимы, так как

$$\langle (m-M)(c-C)\rangle = -\bar{x}(\Delta m)^2. \tag{5.33}$$

Поскольку m и $b(=\bar{y})$ независимы, а m и c не независимы, уравнение наилучшей прямой следует написать в виде

$$y = (m \pm \Delta m)(x - \bar{x}) + (b \pm \Delta b), \tag{5.34}$$

а не в виде

$$y = (m \pm \Delta m)\,x + (c \pm \Delta c). \tag{5.35}$$

Из уравнения (5.34) следует (и это правильно), что ошибка Δy в наилучшем значении y при любом x дается выражением

$$(\Delta y)^2 = (\Delta b)^2 + (x - \bar{x})^2 (\Delta m)^2. \qquad (5.36)$$

Таким образом, можно считать, что наилучшая прямая покачивается вокруг центра тяжести экспериментальных точек — точки G (фиг. 77). В величину Δy вносят независимый вклад ошибка в ординате y точки вращения и ошибка в наклоне прямой. Из уравнения же (5.35) следовало бы, что прямая покачивается вокруг точки H, а это неверно.

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

СИСТЕМА ЕДИНИЦ СИ

Во всей книге мы пользовались так называемой международной системой единиц СИ. Это — всеобъемлющая, логически замкнутая система, созданная для использования во всех областях науки и техники. Официально она была принята в 1960 г. XI Генеральной конференцией по мерам и весам — международной организацией, утверждающей стандарты для разных видов измерений. Сейчас система СИ получает все большее распространение. Помимо других своих достоинств она имеет неоспоримое преимущество перед другими системами в том, что это единая система, охватывающая все возможные теоретические и практические случаи. Она позволяет не тратить на перевод величин из одной системы единиц в другую усилия, которые лучше затратить на что-нибудь более важное.

Основные особенности этой системы таковы:

1) Система СИ — метрическая [1]). В ней шесть основных единиц (см. ниже); вместо сантиметра и грамма старой системы СГС вводятся метр и килограмм.

2) Производные единицы выражаются непосредственно через основные. Например, единица ускорения равна 1 $м \cdot с^{-1}$. Единица силы, ньютон,— это сила, которая телу с массой 1 кг сообщает ускорение 1 $м \cdot с^{-1}$. Единица энергии, джоуль, — это работа, производимая силой в 1 Н при перемещении тела на расстояние 1 м.

В этой системе не рекомендуется вводить дополнительные единицы. Так, единицей давления служит 1 $Н \cdot м^{-2}$, а атмосфера и тор при этом не используются. Аналогичным образом не используется калория; все виды энергии выражают в джоулях. (Правда, электронвольт пока что остается.)

3) Электрические единицы рационализированы [2]): магнитной проницаемости вакуума μ_0 приписано значение

---

[1]) То есть десятичная.— *Прим. ред.*

[2]) Рационализированной называют систему единиц, в которой большинство уравнений электромагнетизма освобождается от множителя 4π.— *Прим. ред.*

$4\pi \cdot 10^{-7}$ Г·м$^{-1}$. Отсюда получают единицу силы тока, ампер,— одну из шести основных единиц. Остальные электрические единицы получаются непосредственно из основных и совпадают с единицами практической системы.

4) Кратные и дольные единицы, как правило, образуют умножением или делением на степень 1000. Так, для сантиметра нет места в системе СИ. В то же время, поскольку интервал между 1 мм^3 и 1 м^3 слишком велик, для удобства оставлена единица объема литр (10^{-3} м^3).

Система СИ — наименования и обозначения единиц

Величина	Единица	Обозначения[1]		Связь с другими единицами	
Основные единицы					
Длина	метр	m	м		
Масса	килограмм	kg	кг		
Время	секунда	s	с		
Сила электрического тока	ампер	A	А		
Термодинамическая температура	кельвин	K	К		
Сила света	кандела	cd	кд		
Дополнительные единицы					
Плоский угол	радиан	rad	рад		
Телесный угол	стерадиан	sr	ср		
Производные единицы					
Сила	ньютон	N	Н	kg·m·s^{-2}	кг·м·с$^{-2}$
Энергия	джоуль	J	Дж	N·m	Н·м
Мощность	ватт	W	Вт	J·s^{-1}	Дж·с$^{-1}$
Электрический заряд	кулон	C	Кл	A·s	А·с
Электрический потенциал	вольт	V	В	J·C^{-1}	Дж·Кл$^{-1}$
Электрическое сопротивление	ом	Ω	Ом	V·A^{-1}	В·А$^{-1}$
Электрическая емкость	фарада	F	Ф	C·V^{-1}= =s·Ω	Кл·В$^{-1}$= =с·Ом$^{-1}$

[1]) Наряду с русскими мы приводим и международные обозначения. — *Прим. перев.*

Магнитный поток	вебер	Wb	Вб	V·s	В·с
Магнитная индукция	тесла	T	Т	$Wb \cdot m^{-2}$	$Вб \cdot м^{-2}$
Индуктивность	генри	H	Г	$V \cdot s \cdot A^{-1} = \Omega \cdot s$	$В \cdot с \cdot А^{-1} = Ом \cdot с$
Частота	герц	Hz	Гц	s^{-1}	$с^{-1}$
Температура	градус Цельсия	°C	°C	t (°C)$=T$ (K)$-273,15$	
Световой поток	люмен	lm	лм	cd·sr	кд·ср
Освещенность	люкс	lx	лк	$lm \cdot m^{-2}$	$лм \cdot м^{-2}$

Десятичные множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц

Множитель	Приставка	Обозначения		Множитель	Приставка	Обозначения	
10^{-3}	милли	m	м	10^{3}	кило	k	к
10^{-6}	микро	μ	мк	10^{6}	мега	M	М
10^{-9}	нано	n	н	10^{9}	гига	G	Г
10^{-12}	пико	p	п	10^{12}	тера	T	Т
10^{-15}	фемто	f	ф				
10^{-18}	атто	a	а				

Примечание. Приставку следует добавлять к наименованию единицы до возведения в степень, т. е. 1 мкм^2 = 1 (мкм)^2 = 10^{-12} м^2.

Связь с единицами системы СГС

(Здесь $c = 3 \cdot 10^{10}$)

$$1\ А = 10^{-1}\ СГСМ = \frac{c}{10}\ СГСЭ$$

$$1\ В = 10^{8}\ СГСМ = \frac{10^8}{c}\ СГСЭ$$

$$1\ Ом = 10^{9}\ СГСМ = \frac{10^9}{c^2}\ СГСЭ$$

$$1\ Ф = 10^{-9}\ СГСМ = 10^{-9} c^2\ СГСЭ$$

$$1\ Г = 10^{9}\ СГСМ = \frac{10^9}{c^2}\ СГСЭ$$

1 Т = 10^4 СГСМ (гаусс)
1 Вб = 10^8 СГСМ (максвелл)
1 А·м$^{-1}$ = $4\pi \cdot 10^{-3}$ СГСМ (эрстед)

Прочие единицы

Длина	1 микрон = 10^{-6} м
	1 ангстрем = 10^{-10} м
	1 икс-единица = 10^{-13} м
	1 ферми = 10^{-15} м
Площадь	1 барн = 10^{-28} м^2
Сила	1 дина = 10^{-5} Н
Энергия	1 эрг = 10^{-7} Дж
	1 калория (15° С) = 4,1855 Дж

Давление	1 бар $= 10^5$ Н$\cdot$м$^{-2}$
	1 атмосфера $= 1{,}01325 \cdot 10^5$ Н$\cdot$м$^{-2}$
	1 тор $= 1$ мм рт. ст. $= 133{,}322$ Н$\cdot$м$^{-2}$
Вязкость	
динамическая	1 пуаз (1 П) $= 10^{-1}$ Н$\cdot$с$\cdot$м$^{-2}$
кинематическая	1 стокс (1 Ст) $= 10^{-4}$ м$^2\cdot$с$^{-1}$

Определения основных единиц системы СИ

Метр

Метр — длина, численно равная 1 650 763,73 длины волны в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона-86.

Килограмм

Килограмм — единица массы — равен массе международного прототипа килограмма, который хранится в Международном бюро мер и весов в Севре (Франция).

Секунда

Секунда — 9 192 631 770 периодов излучения, соответствующего переходу между уровнями $F = 4$, $m_F = 0$ и $F = 3$, $m_F = 0$ основного состояния атома цезия-133 в отсутствие внешних полей.

Ампер

Ампер — сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, создает между ними силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

Кельвин

Кельвин есть 1/273,16 часть термодинамической температуры тройной точки воды.

Кандела (единица силы света)

Кандела определяется на основании того, что яркость черного излучателя при температуре затвердевания платины (около 2042 К) равна 0,6 кд$\cdot$мм$^{-2}$.

Подробнее с системой СИ можно познакомиться в книге [21].

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

ЗНАЧЕНИЯ КОНСТАНТ

Физические константы

Скорость света	$c = 2{,}9979 \cdot 10^{8}$ м·с$^{-1}$
Элементарный заряд	$e = 1{,}6021 \cdot 10^{-19}$ Кл
Число Авогадро	$N_A = 6{,}0225 \cdot 10^{26}$ кмоль$^{-1}$
Атомная единица массы	$m_0 = 1/N_A = 1{,}6604 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса электрона	$m_e = 9{,}1091 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса протона	$m_p = 1{,}6725 \cdot 10^{-27}$ кг
Постоянная Фарадея	$F = N_A e = 9{,}6487 \cdot 10^{7}$ Кл·кмоль$^{-1}$
Постоянная Планка	$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
	$\hbar = h/2\pi = 1{,}0545 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Ридберга	$R_\infty = 1{,}0974 \cdot 10^{7}$ м$^{-1}$
Постоянная тонкой структуры	$1/\alpha = 137{,}039$
Магнетон Бора	$\mu_Б = 9{,}273 \cdot 10^{-24}$ Дж·Т$^{-1}$
Постоянная Стефана—Больцмана	$\sigma = 5{,}670 \cdot 10^{-3}$ Вт·м$^{-2}$·К$^{-4}$
Газовая постоянная	$R = 8314$ Дж·К$^{-1}$·кмоль$^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k = R/N_A = 1{,}3805 \cdot 10^{-23}$ Дж·К$^{-1}$
Стандартный объем идеального газа	$V_0 = 22{,}414$ м^3·кмоль$^{-1}$
Ускорение силы тяжести	

$$g = (9{,}7805 + 0{,}0517 \sin^2 \varphi - 3{,}1 \cdot 10^{-6}\, H)\ \text{м} \cdot \text{с}^{-2},$$

где φ — широта, H — высота (в метрах) над уровнем моря.

Значения всех физических констант, кроме g, взяты из справочника [4]; ошибки указанных величин не превышают единицы в последней значащей цифре. Выражение для g взято из справочника [21]; оно справедливо с точностью $5 \cdot 10^{-4}$ м·с$^{-2}$.

Соотношения между энергетическими единицами

$$1\ \text{эВ} = 1{,}6021\cdot 10^{-19}\ \text{Дж}.$$

Энергия, эквивалентная атомной единице массы,

$$m_0c^2 = 931{,}48\ \text{МэВ},$$

$$1\ \text{ридберг} = chR_\infty = 13{,}605\ \text{эВ}.$$

Математические константы

	Числовое значение	lg
π	3,14159	0,49715
π^2	9,86960	0,99430
$\sqrt{\pi}$	1,77245	0,24857
e	2,71828	0,43429
ln 10	2,30259	0,36222
1 радиан	57,296°	1,75812

ЛИТЕРАТУРА

1. *Birge R. T., Menzel D. H.*, Phys. Rev., 37, 1669 (1931).
2. *Bleaney B. I., Bleaney B.*, Electricity and Magnetism, 2nd ed., London, 1965.
3. *Candler C.*, Modern Interferometers, London, 1951.
4. *Cohen E. R., DuMond J. W. M.*, Rev. Mod. Phys., 37, 537 (1965).
5. *Comrie L. J.*, Chambers' Four-Figure Mathematical Tables, Edinbourgh, 1956 (имеется перевод: *Л. Дж. Комри, Л. М. Милн-Томсон*, Четырехзначные математические таблицы, М., 1964). *Comrie L. J.*, Chambers' Shorter Six-Figure Mathematical Tables, Edinbourgh, 1961 (имеется перевод: *Л. Дж. Комри*, Шестизначные математические таблицы Чемберса, М., 1964).
6. *Cook A. H.*, Phil. Trans. Roy. Soc., A261, 211 (1967); Contemporary Physics, 8, 251 (1967).
7. *Curtis H. L.*, Electrical Measurements, London, 1937.
8. *Dicke R. H.*, Scientific American, 205, 6, 84 (1961).
9. *Dicke R. H., Wittke J. P.*, Introduction to Quantum Mechanics, Reading, Mass., 1960.
10. *Ditchburn R. W.*, Light, Glasgow, 1952 (имеется перевод: *Р. Дитчберн*, Физическая оптика, М., 1965).
11. *Duffin W. J.*, Electricity and Magnetism, London, 1965.
12. *Dunnington F. G.*, Phys. Rev., 52, 475 (1937).
13. *Dushman S.*, Scientific Foundations of Vacuum Technique, 2nd ed., ed. J. M. Lafferty, New York, 1962 (имеется перевод: *С. Дешман*, Научные основы вакуумной техники, изд-во «Мир», 1964).
14. *Essen L.*, Contemporary Physics, 7, 343 (1966).
15. *Fowler R. H.*, Statistical Mechanics, 2nd ed., Cambridge, 1936.
16. *Froome K. D.*, Proc. Roy. Soc., A223, 195 (1954); A247, 109 (1958).
17. *Guest P. G.*, Numerical Methods of Curve Fitting, Cambridge, 1961.
18. *Hall J. A.*, The Measurement of Temperature, London, 1966.
19. Temperature — Its Measurement and Control in Science and Industry, ed. C. M. Herzfeld, vol. 3, P1 and P2, New York, 1962.
20. *Kappler E.*, Ann. d. Phys., 31, 377 (1938).
21. *Kaye G. W. C., Laby T. H.*, Tables of Physical and Chemical Constants, 13th ed., London, 1966 (имеется перевод: *Д. В. К. Кэй, Т. Г. Лэби*, Таблицы физических и химических постоянных, М., 1962).
22. *Kennard E. H.*, Kinetic Theory of Gases, London, 1938.
23. *Lion K. S.*, Instrumentation in Scientific Research — Electrical Input Transducers, London, 1959.
24. *Mendlowitz H., Case K. M.*, Phys. Rev., 97, 33 (1955).
25. *Plimpton S. J., Lawton W. E.*, Phys. Rev., 50, 1066 (1936).
26. *Pound R. V., Rebka G. A.*, Phys. Rev. Letters, 4, 337 (1960).
27. *Rayleigh, Ramsay W.*, Phil. Trans. Roy. Soc., 186, 187 (1895).
28. *Reynolds O.*, Phil. Trans. Roy. Soc., 174, 935 (1883).

29. *Richtmyer F. K., Kennard E. H., Lauritsen T.*, Introduction to Modern Physics, 5th ed., London, 1955.
30. *Roberts J. K., Miller A. R.*, Heat and Thermodynamics, 5th ed., Glasgow, 1960 (имеется перевод: *Дж. Робертс*, Теплота и термодинамика, М.—Л., 1950).
31. *Roll P. G., Krotkov R., Dicke R. H.*, Ann. of Phys., 26, 442 (1964).
32. *Rosser M. G. V.*, An Introduction to the Theory of Relativity, London, 1964.
33. *Sciama D. W.*, The Unity of Universe, London, 1959.
34. *Smith C. J.*, General Properties of Matter, 2nd ed., London, 1960.
35. *Sommerfield C. M.*, Phys. Rev., 107, 328 (1957).
36. *Stewart A. T., Squires G. L.*, Journ. Sci. Instr., 32, 26 (1955).
37. *Stuart R. D.*, An Introduction to Fourier Analysis, London, 1961.
38. *Symonds J. L.*, Rep. Progr. Phys., 18, 83 (1955).
39. *Thomson J. J.*, Phil. Mag., Ser. 5, 44, 293 (1897).
40. *Tolansky S.*, An Introduction to Interferometry, London, 1955.
41. *Tolhoek H. A.*, Rev. Mod. Phys., 28, 277 (1956).
42. *Urey H. C., Brickwedde F. G., Murphy G. M.*, Phys. Rev., 39, 864 (1932).
43. *Vigoureux P.*, Proc. Roy. Soc., A270, 72 (1962).
44. *Whittaker E., Robinson G.*, The Calculus of Observations, 4th ed., Glasgow, 1944 (имеется перевод предыдущего издания: *Г. Робинсон, Э. Уиттекер*, Математическая обработка результатов, М.—Л., 1935).
45. *Wilkinson D. T., Crane H. R.*, Phys. Rev., 130, 852 (1963).
46. *Wood A.*, Acoustics, Glasgow, 1940.
47. *Zemansky M. W.*, Temperatures Very Low and Very High, Prinston, N. J., 1964 (имеется перевод: *M. Земанский*, Температуры очень низкие и очень высокие, изд-во «Мир», 1968).

Оглавление

Часть II

Экспериментальные методы

Часть III

Запись результатов и вычисления

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, *Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».*

Дж. Сквайрс

ПРАКТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Редактор *Е. С. Куранский*
Художник *Г. А. Щетинин*
Художественный редактор *П. Ф. Некундэ*
Технический редактор *В. И. Резник*

Сдано в набор 31/III 1971 г.
Подписано к печати 16/VIII 1971 г.
Бумага № 2 84×108/32=3,88 бум. л.
13,02 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 10,81.
Изд. № 2/5782. Цена 95 к. Зак. 877

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 16
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР.
Москва, Трехпрудный пер., 9.